УДК 378 DOI: 10.17673/vsgtu-pps.2020.3.5

ФОРМИРОВАНИЕ КОНЦЕПТУАЛЬНОГО ПОНИМАНИЯ МАТЕМАТИКИ У СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ

***Е.В. Кузнецова*[1], *Н.Ю. Жбанова*[2]**

[1,2]Липецкий государственный технический университет

Российская Федерация, 398055, г. Липецк, ул. Московская, 30

[1] E-mail: eva351@yandex.ru

[2] E-mail: zbanoid@gmail.com

Аннотация

Глобальные вызовы, с которыми сегодня сталкивается человечество, ставят перед высшим образованием задачу готовить специалиста, обладающего фундаментальной подготовкой и способностью учиться в течение всей жизни. Фундаментализация образования невозможна без формирования у студентов концептуального понимания изучаемого материала. Эта проблема в достаточной мере актуальна при изучении математики в силу специфики природы данной науки. Отсутствие у исследователей единой точки зрения при определении сущности концептуального понимания математики не позволяет практикам разрабатывать инструменты для оценки уровня концептуального понимания у студентов вузов и осуществлять целенаправленные шаги по его формированию. Цель данной статьи – выявить и сформулировать сущностные характеристики и педагогические условия развития концептуального понимания математики, а также исследовать возможности компьютерного моделирования как средства формирования концептуального понимания в процессе обучении теории вероятностей студентов технических университетов, определить эффективность заданий компьютерного практикума. Проведенное исследование показало, что компьютерный практикум, разработанный на основе выявленных педагогических условий и с учетом дидактических возможностей ИКТ в учебном процессе, является эффективным средством развития концептуального понимания при изучении курса теории вероятностей. Студенты, в учебный план которых был включен практикум с элементами компьютерного моделирования, в большей мере владеют методологически значимым знанием и способностью связать ранее изученный материал с новыми проблемами.

Ключевые слова: *высшая школа, математическое образование, фундаментализация образования, компьютерное моделирование.*

Благодарности: выражаем благодарность рецензентам за внимание к нашей работе.

---

[1]*Кузнецова Елена Васильевна,* кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика».

[2]*Жбанова Наталья Юрьевна,* кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная математика».

Введение

Сегодня мы наблюдаем быстрое развитие техники и технологий, появление новых профессий и исчезновение старых, постоянную смену требований к компетентности специалиста. В данных условиях перед профессиональным образованием встает задача не только идти в ногу со временем, но и предвосхищать будущее. Таким образом, возрастает актуальность принципа фундаментальности образования. Как отмечал В.А. Садовничий, «фундаментальность высшего образования – это соединение научного знания и процесса образования, дающее понимание образованным человеком того факта, что все мы живем по законам природы и общества, которые никому не дано игнорировать» [1]. Овладение фундаментальными знаниями, составляющими основу этих законов, является залогом устойчивого развития общества, поскольку главной причиной глобального кризиса является человек, недостаток его компетентности и культуры. В реализации принципа фундаментальности образования ключевая роль принадлежит концептуальному пониманию. Проблема концептуального понимания изучаемого материала в процессе преподавания математики актуальна в силу самой специфики данной науки, высокой абстрактности ее понятий. Являясь универсальным языком науки, математика посредством математического моделирования позволяет проникать в суть изучаемого явления. Поэтому знание алгоритмов и формальное знание ее законов недостаточно современному специалисту для решения профессиональных задач, особенно для студентов технических, математических и IT-направлений. Применение компьютерного моделирования в учебном процессе позволяет достичь необходимого баланса между теорией, экспериментом и вычислениями, что способствует концептуальному пониманию изучаемых дисциплин и формированию профессиональных компетенций будущих специалистов [2].

Цель статьи – выявить и сформулировать сущностные характеристики и педагогические условия формирования концептуального понимания математики, а также исследовать возможности интеграции компьютерного моделирования как средства развития концептуального понимания в процессе обучения теории вероятностей студентов технических университетов, определить эффективность разработанной системы заданий компьютерного практикума.

1. Обзор литературы

Следует отметить, что фундаментальность представляет собой важную традицию образования в России. По словам В.А. Садовничего, «в отличие от других наций мы сразу стали учиться научно мыслить и учить студенчество мыслить целостными, фундаментальными теориями и действовать в практике сообразно методам получения таких фундаментальных знаний. На этой основе взросли наша академическая наука, университеты, общеобразовательная школа» [1]. Анализ публикаций последних лет [3–6] позволяет сделать вывод, что проблема фундаментализации как образования в целом, так и математического образования в школе и вузе является актуальной. В соответствии с мнением А.С. Воронина [7], понятие *фундаментальность образования* подразумевает единство трех составляющих: 1) глубина, основательность и целостность системообразующего методологически значимого знания; 2) взаимосвязь теоретической и прикладной составляющих обучения; 3) развитие научного мышления и формирование общей культуры. Заметим, что ни одна из них не может быть реализована без формирования у студентов концептуального понимания.

Заметим также, что большая часть работ, посвященных преподаванию математики, в той или иной мере затрагивает и проблему понимания: ни один преподаватель не ставит в качестве цели обучения уровень запоминания-воспроизведения. В соответствии с традицией при изучении математики такие исследователи, как Дж. Хиберт и П. Лефевр [8], А.Дж. Баруди, Ю. Фейл и А.Р. Джонсон [9], выделяют концептуальное и процессуальное знания (conceptual and procedural knowledge): понимание понятий и умение решать задачи. Исследования Дж.П. Бирнса, Б. Риттл-Джонсона и М. Шнейдера показали, что эти два вида знания находятся в интерактивном взаимодействии [10–12]. Однако, по мнению Н. Крукса, в последние годы большее внимание уделяется концептуальному пониманию [13]. Среди статей российских авторов, касающихся вопросов снижения формализма и повышения уровня понимания материала при изучении математики, можно выделить работы А.Я. Хинчина [14], Э.К. Брейтгам и С.Д. Каразова [15], С.А. Владимирцевой [16], Е.В. Кузнецовой [17].

В преподавании теоретико-вероятностных разделов математики проблема концептуального понимания имеет ряд особенностей в силу того, что теория вероятностей занимает особое положение среди прочих дисциплин естественно-научного цикла из-за некоторой двойственности. Двойственность ее заключается в том, что основные понятия теории вероятностей подчиняются строгой математической логике и в то же время могут быть рассмотрены как философские суждения. Действительно, глубокое погружение в данную дисциплину невозможно без осмысления философской сущности таких важнейших ее понятий, как случайность, возможность, вероятность, как и невозможно без формирования особого стиля мышления, приобретения опыта стохастического моделирования [18].

Компьютерный практикум позволяет обучающимся дополнить абстрактные представления о вероятностных распределениях четкими зрительными образами и осязаемым практическим опытом; в дальнейшем это сделает возможным эффективное вероятностное прогнозирование при решении творческих научно-исследовательских задач [19–22].

2. Материалы и методы

Методологическую основу исследования составили системный и личностно-деятельностный подходы. Применение компьютерного моделирования в учебном процессе организовано с учетом дидактических возможностей ИКТ: интерактивный диалог; компьютерная визуализация учебной информации; компьютерное моделирование; хранение больших объемов информации и обеспечение легкого доступа к ней; автоматизация процессов вычисления и информационно-поисковой деятельности; автоматизация процессов информационно-методического обеспечения, организационного управления учебной деятельностью и контроля результатов обучения [23, с. 13–14]. Разработка теоретического базиса и интеграция компьютерного моделирования в практику преподавания теории вероятностей основаны на анализе научной литературы, анализе и обобщении педагогического опыта и результатов педагогического эксперимента и изучении студенческих оценок.

3. Результаты исследования

Как подчеркивают в своей работе Crooks и Alibali, среди ученых нет единого подхода к определению понятия «концептуальное понимание в математике» [13]. Однако на основе изучения материалов статей можно выделить особенности данного понятия. Прежде всего, к концептуальному пониманию в математике относят комплексное функциональное понимание математических идей. Знания студентов, для которых характерно концептуальное понимание, не ограничиваются отдельными фактами и алгоритмами. Они понимают, почему та или иная математическая идея важна и каковы ситуации, в которых она полезна. Они организовали свои знания в связное целое, что позволяет им изучать новые идеи, соединяя эти идеи с тем, что они уже знают. Поскольку факты и методы, изученные с пониманием, связаны, их легче запомнить и использовать и они могут быть восстановлены, когда их забывают.

Студенты, обладающие концептуальным пониманием математики:

– могут обосновать свои действия в ходе решения задачи или доказательства теоремы;

– знают границы применимости, могут привести примеры и контрпримеры;

– гибко используют альтернативные подходы;

– умеют переходить в другие контексты;

– обладают способностью формировать различные представления объекта (формулы, графики, таблицы);

– могут придумать задачу, при решении которой применима данная теорема или правило.

Для достижения концептуального понимания математики при обучении студентов вузов необходимы следующие педагогические условия:

– практическое, активное обучение, которое питает цикл восприятия-действия;

– соотнесение ранее освоенного материала с новыми идеями и проблемами;

– применение математики в различных формах, которые требуют творческого решения проблем, обучение навыку применять понятия к совершенно новым ситуациям;

– формирование множества ключевых, методологически значимых понятий и идей;

– акцент на идеях, а не на алгоритмах.

В работе [16] выделяется два способа формирования математических понятий: классификационно-операционный и актуализированный (онтологический). В первом способе понятие вводится через род и видовые различия, при этом основными действиями являются выявление существенных признаков и классификация. Второй способ предполагает создание образа понятия посредством различных форм представления знания. Классификационно-операционный способ формирования понятий эффективен для наук о природе, таких как химия, физика, биология. Актуализированный способ формирования понятий эффективен для абстрактных и базовых дисциплин.

Примером таких понятий могут служить основные понятия вероятностных разделов математики. На основе изучения научных исследований по философии и истории теории вероятностей были сформулированы системы ключевых понятий [18]. Для теории вероятностей это случайность, вероятность, случайное событие, случайная величина, вероятностные распределения, числовые характеристики случайных величин, совместные распределения случайных величин, независимость, корреляция. Для математической статистики ключевыми понятиями являются такие понятия, как выборка, генеральная совокупность, параметр распределения, оценка параметра распределения, несмещенность, состоятельность оценок, доверительный интервал, гипотеза, статистический вывод. Формированию систем ключевых понятий должно уделяться повышенное внимание, поскольку это создает базис концептуального понимания вероятностных методов и идей.

Как показала практика, компьютерное моделирование является эффективным инструментом формирования понятий теории вероятностей при условии реализации комплексного использования ИКТ в учебном процессе с учетом всего спектра их дидактических возможностей, раскрытых в работе И.В. Роберт [23, с. 13–14]. Нами разработаны системы заданий для изучения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», которые позволяют студентам создать образ изучаемого понятия, выявить его характеристики и свойства. Цель практикума – дать возможность студентам приобрести опыт работы с моделями объектов, имеющих вероятностную природу, понять сущность теоретических положений, приобрести навыки вероятностного моделирования и компьютерного анализа данных.

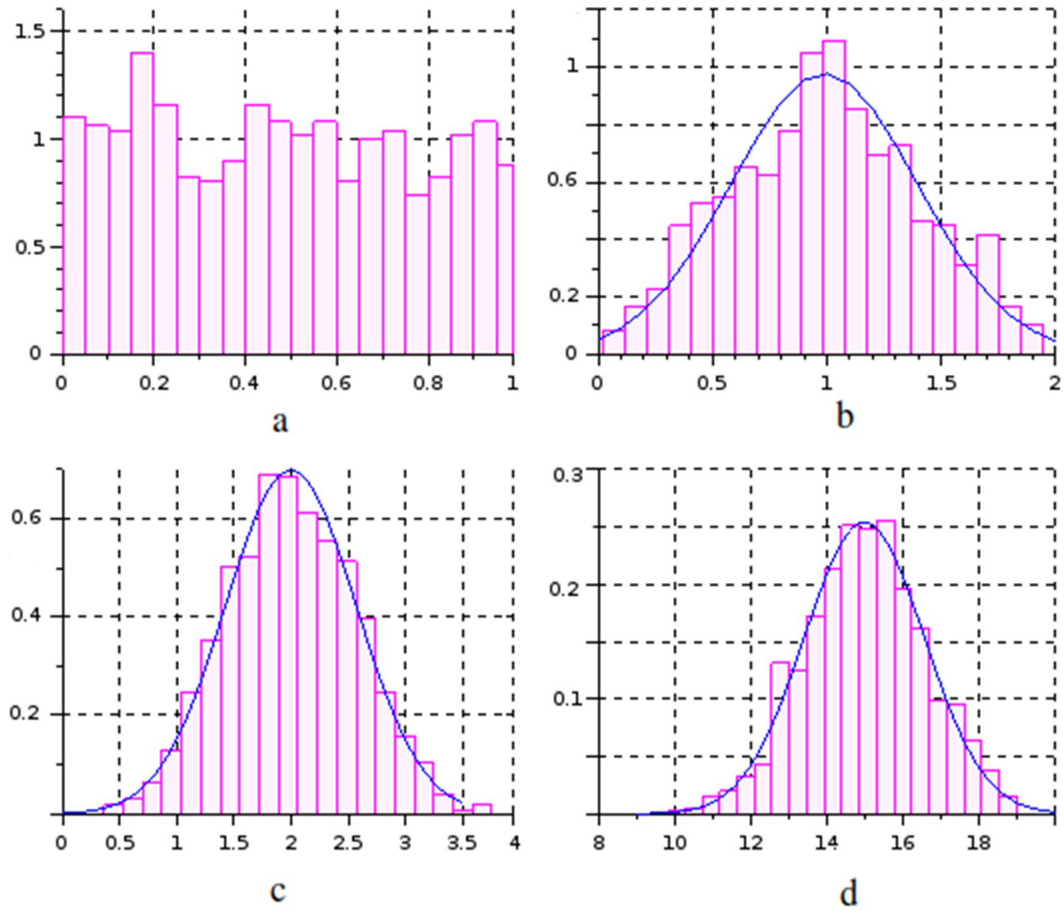
Например, в курсе теории вероятностей важное место для концептуального понимания предмета и практического применения принадлежит теме «Предельные теоремы» и, в частности, изучению центральной предельной теоремы Ляпунова. В центральной предельной теореме утверждается, что если случайная величина представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то закон распределения такой величины будет близок к нормальному. Таким образом, центральная предельная теорема аккумулирует такие ключевые понятия теории вероятностей, как случайная величина, законы распределения, числовые характеристики случайных величин. В целях активного понимания, запоминания и закрепления материала студентам предлагается пройти три этапа выполнения задания.

На первом этапе обучающиеся генерируют в любом подходящем математическом пакете (Statistica, Excel, R и т. д.) 10 столбцов x_1, ..., x_{10} по 100 случайных чисел, имеющих одно из трех распределений – нормальное $N(a, \sigma)$, экспоненциальное $E(\lambda)$ или равномерное $U(a, b)$ на отрезке $[a, b]$. В процессе выполнения задания студентам предлагается сформулировать сущность таких ключевых понятий, как случайная величина, вероятностное распределение, числовые характеристики случайной величины, а также вспомнить свойства основных вероятностных распределений и способы генерирования случайных величин в различных программных средах. Отметим, что это все студенты уже изучали ранее. Акцент на ключевых понятиях в разных контекстах способствует переходу информации из кратковременной в долговременную память (консолидация материала) и в то же время позволяет сформировать связи между важнейшими положениями дисциплины.

На втором этапе задания вычисляются суммы $y_1 = x_1$, $y_2 = y_1 + x_2$, … $y_{10} = y_9 + x_{10}$, каждая из которых представляет собой столбец из 100 чисел.

Наконец, на третьем этапе студенты строят гистограммы для сумм y_1, …, y_{10}, анализируют полученные графики и на практике убеждаются в справедливости центральной предельной теоремы: при увеличении количества слагаемых закон распределения суммы приближается к нормальному. Кроме этого, студентам предлагается сделать вывод о влиянии выбора закона распределения на вид получаемых гистограмм.

На рисунке выборочно представлены гистограммы для сумм y_1, y_5, y_8, y_{10} и соответствующие нормальные кривые. В рассматриваемом примере для генерации случайных чисел x_1, …, x_{10} было выбрано равномерное распределение. На рисунке *a* приведена гистограмма для переменной y_1, которая соответствует равномерному распределению. Сравнив графики, легко убедиться, что гистограммы на рисунках *b*–*d* (суммы y_5, y_8, y_{10} соответственно) становятся все ближе и ближе к нормальному распределению.



Графическая иллюстрация третьего этапа лабораторной работы

Третий этап особенно важен, так как позволяет студентам сопоставить ключевым понятиям графические образы, что влечет за собой углубление запоминания и позволяет формировать различные представления изучаемого объекта. Образная форма передачи информации, сочетающаяся с вербальной, играет одну из основных ролей в формировании концептуального понимания.

Далее, в процессе выполнения лабораторной работы студентам предлагается выявить и сформулировать связь центральной предельной теоремы с изученной ранее теоремой Муавра – Лапласа, которая, по сути, также представляет собой один из вариантов закона больших чисел. Таким образом, при правильно подобранной последовательности заданий и лабораторных работ одно и то же понятие либо утверждение освещается и иллюстрируется примерами с разных сторон, что способствует пониманию и запоминанию как самих ключевых понятий, так и связей между ними, что приводит к более полному и осмысленному пониманию предмета.

Для проверки эффективности разработанной системы заданий был проведен педагогический эксперимент, в котором принимали участие две группы студентов из 18 и 16 человек, изучавших теорию вероятностей в одном потоке. В первой группе (экспериментальной) учебным планом помимо лекций и практических занятий был предусмотрен компьютерный практикум. Во второй группе (контрольной) предусмотрены только лекции и практические занятия. В следующем семестре в процессе изучения дисциплины «Эконометрика» рассматривались свойства оценок параметров линейной регрессии, полученных по методу наименьших квадратов, и условия проверки статистических гипотез о значимости коэффициентов регрессии. В экспериментальной группе 14 человек (77 %) смогли сформулировать сущность центральной предельной теоремы, в контрольной группе – 6 человек (38 %). Применить центральную предельную теорему в новом контексте смогли 5 человек в первой группе (28 %) и 2 человека во второй группе (12 %). Таким образом, в экспериментальной группе студенты демонстрируют более высокий уровень концептуального понимания, чем в контрольной.

Обсуждение и заключение

В связи с математизацией и интеграцией научного знания проблема концептуального понимания математики приобретает особую актуальность, поскольку концептуальное понимание в математике – это создание надежной структуры, представляющей многочисленные и переплетенные отношения между математическими идеями, паттернами и процедурами. Эта структура может использоваться для последовательной интеграции новых знаний и решения незнакомых проблем как при обучении в вузе, так и в будущей профессиональной деятельности. Выявленные и сформулированные сущностные характеристики и педагогические условия развития концептуального понимания создают теоретическую основу для планирования практических шагов по формированию этого важного качества в процессе преподавания математики и разработки оценочных инструментов, позволяющих оценить уровни его сформированности у студентов.

Примером подобных шагов может служить интеграция компьютерного моделирования в процесс преподавания курса теории вероятностей, основанная на комплексном применении ИКТ как средства обучения и инструмента познания. Педагогический эксперимент показал, что компьютерный практикум, построенный с учетом сформулированных педагогических условий формирования концептуального понимания математики и с учетом дидактических возможностей ИКТ, является эффективным средством развития концептуального понимания теоретико-вероятностных идей и методов, поскольку позволяет студентам организовывать свое знание системно и применять его в новых ситуациях.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Садовничий В.А.* Традиции и современность // Высшее образование в России. – 2003. – № 1. – С. 11–18.
2. *Teodoro V.D., Neves R.G.* Mathematical modelling in science and mathematics education. Computer Physics Communications. 2011. Vol. 182 (1). P. 8–10. https://doi.org/10.1016/j.cpc.2010.05.021 (accessed August 21, 2020).
3. *Деза Е.И.* Фундаментальные знания как содержательная база профессионализма учителя математики // Профессионализм педагога: сущность, содержание, перспективы развития. Материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 130-летия А.С. Макаренко. Под ред Е.И. Артамоновой. – М.: Изд-во Некоммерческое партнерство «Международная академия педагогического образования», 2019. – С. 81–83.
4. *Перминов Е.А., Гаджиев Д.Д., Абдуразаков М.М.* Об актуальности фундаментализации математической подготовки студентов педагогических направлений в цифровую эпоху // Образование и наука. – 2019. – Т. 21. – № 5. – С. 87–112. DOI: 10.17853/1994-5639-2019-5-87-112
5. *Подуфалов Н.Д.* О некоторых методологических проблемах развития системы образования // Педагогика. – 2019. – Т. 83. – № 8. – С. 5–11.
6. *Тестов В.А.* Цели и содержание обучения математике: современный этап // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2018. – № 20. – С. 48–56.
7. *Воронин А.С.* Словарь терминов по общей и социальной педагогике. – Ектеринбург: УГТУ-УПИ, 2006. – 135 с.

8 *Hiebert J., Lefevre P.* Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. New York: Routledge, 1986. P. 113–133. https://doi.org/10.4324/9780203063538 (accessed August 22, 2020).
9. *Baroody A.J., Feil Y., Johnson A.R.* An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. Journal for Research in Mathematics Education. 2007. Vol. 38. P. 115–131. DOI: 10.2307/30034952, https://www.jstor.org/stable/30034952 (accessed August 30, 2020).
10. *Byrnes J.P., Wasik B.A.* Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. Developmental Psychology. 1991. Vol. 27. P. 777–786. https://doi.org/10.1037/0012-1649.27.5.777 (accessed September 21, 2020).
11. *Byrnes J.P.* The conceptual basis of procedural learning. Cognitive Development. 1992. Vol. 7. Pp. 235–257. https://doi.org/10.1016/0885-2014(92)90013-H (accessed September 11, 2020).
12. *Rittle-Johnson B., Schneider M.* Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. Oxford handbook of numerical cognition. Oxford: Oxford University Press. 2014. P. 1118–1134.https://www.oxfordhandbooks.com/view/10.1093/ oxfordhb/9780199642342.001.0001/oxfordhb-9780199642342-e-014 (accessed September 20, 2020).
13. *Crooks N.M., Alibali M.W.* Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. Developmental Review. 2014. Vol. 34. P. 344–377. https://doi.org/10.1016/j.dr.2014.10.001 (accessed September 2, 2020).
14. *Хинчин А.Я.* О формализме в школьном преподавании математики // Педагогические статьи. – М.: Изд-во Академии педагогических наук РСФСР, 1963. – 204 с.
15. *Брейтигам Э.К., Каракозов С.Д.* Целостность системы базовых понятий при изучении математики в школе и вузе // Мир науки, культуры, образования. – 2010. – № 3. – С. 190–194. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18076976 (дата обращения: 04.09.2020).
16. *Владимирцева С.А.* Основные направления развития теории формирования математических понятий в школе // Мир науки, культуры, образования. – 2008. – № 4. – С. 103–107 [Электронный ресурс]. – URL: https://www.elibrary.ru/ item.asp?id=11625982 (дата обращения: 05.09.2020).
17. *Кузнецова Е.В.* К вопросу о взаимосвязи знания и понимания в процессе преподавания математики // Преподаватель XXI век. – 2013. – № 3–1. – С. 52–57 [Электронный ресурс]. – URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20316558 (дата обращения: 06.09.2020).
18. *Kuznetsova E.* Probabilistic ideas and methods in undergraduate mathematics: axiological aspects. IEJME: Mathematics Education. 2019. Vol. 14. No. 2. – Pp. 363–373. https://doi.org/10.29333/iejme/5720 (accessed August 30, 2020).
19. *Fielding-Wells J.* Dot plots and hat plots: supporting young students emerging understandings of distribution, center and variability through modeling. ZDM Mathematics Education. 2018. Vol. 50. P. 1125–1138. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0961-1 (accessed August 31, 2020).

20. *Konold C., Harradine A., Kazak S.* Understanding distributions by modeling them. International Journal of Computers for Mathematical Learning. 2007. Vol. 12(3). P. 217–230. https://doi.org/10.1007/s10758-007-9123-1 (accessed August 3, 2020).
21. *Pfannkuch M., Budgett S., Fewster R., Fitch M., Pattenwise S., Wild C., Ziedins I.* Probability Modeling and Thinking: What Can We Learn from Practice? Statistics Education Research Journal. 2016. Vol. 15. № 2. P. 11–37. http://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ15(2)_Pfannkuch.pdf (accessed August 13, 2020).
22. *Steel E.A., Liermann M., Guttorp P.* Beyond Calculations: A Course in Statistical Thinking. The American Statistician. 2019. Vol. 73 (1). Pp. 392–401. https://doi.org/10.1080/00031305.2018.1505657 (accessed August 23, 2020).
23. *Роберт И.В.* Теория и методика информатизации образования (психолого-педагогический и технологический аспекты). – М.: Институт информатизации образования, 2008. – 274 с. С. 13–14.

Поступила в редакцию 25.07.2020
В окончательном варианте 19.09.2020

UDC 378

FORMING A CONCEPTUAL UNDERSTANDING OF MATHEMATICS AT STUDENTS OF TECHNICAL UNIVERSITIES

E.V. Kuznetsova[1], N.Yu. Zhbanova[2]
[1,2]Lipetsk State Technical University
30, Moskovskaya St., Lipetsk, 398600, Russian Federation
[1] E-mail: eva351@yandex.ru
[2] E-mail: zbanoid@gmail.com

Abstract
The global challenges that humanity is facing today pose the task of higher education to prepare a specialist with fundamental training and the ability to learn throughout life. Fundamentalization of education is not possible without the formation of students' conceptual understanding of the material studied. This problem is quite relevant in the study of mathematics due to the specific nature of this science. The researchers' lack of a unified point of view in determining the essence of the conceptual understanding of mathematics does not allow practitioners to develop tools for assessing the level of conceptual understanding among university students. The purpose the article is to identify and formulate the essential characteristics and pedagogical conditions for the formation of a conceptual understanding of mathematics, as well as to explore the possibilities and effectiveness of the integration of computer modeling

[1] *Elena V. Kuznetsova,* Cand. Phys.-Math. Sci., Associate Professor of Applied Mathematics Department.
[2] *Natalia Yu. Zhbanova,* Cand.Tech.Sci., Associate Professor of Applied Mathematics Department.

as an instrument of forming a conceptual understanding in the process of teaching probability theory to students of technical universities. The study showed that a computer workshop, developed based on identified pedagogical conditions and taking into account the didactic capabilities of ICT in the educational process, is an effective means of developing conceptual understanding when studying a course in probability theory. Students whose curriculum included a workshop with elements of computer modeling have a more excellent knowledge of methodologically significant knowledge and the ability to relate previously learned material to new problems.

Keywords: *higher education, mathematical education, fundamentalization of education, computer modeling.*

Acknowledgements: *We thank the reviewers for their attention to our work.*

REFERENCES

1. *Sadovnichiy V.A.* Traditsii i sovremennost' [Traditions and modernity]. *Vyssheye obrazovaniye v Rossii.* 2003. No. 1. Pp. 11–18.
2. *Teodoro V.D., Neves R.G.* Mathematical modelling in science and mathematics education. Computer Physics Communications. 2011. Vol. 182 (1). Pp. 8–10. https://doi.org/10.1016/j.cpc.2010.05.021 (accessed August 21, 2020).
3. *Deza E.I.* Fundamental'nyye znaniya kak soderzhatel'naya baza professionalizma uchitelya matematiki [Fundamental knowledge as a substantial basis for the professionalism of a mathematics teacher]. *Materialy Mezhdunarodnoĭ nauchno-prakticheskoĭ konferentsii posviashchennoĭ 130-letiia A.S. Makarenko.* Moscow: Edited by Nekommercheskoye partnerstvo «Mezhdunarodnaya akademiya pedagogicheskogo obrazovaniya», 2019. Pp. 81–83.
4. *Perminov E.A., Gadzhiev D.D., Abdurazakov M.M.* Ob aktual'nosti fundamentalizatsii matematicheskoy podgotovki studentov pedagogicheskikh napravleniy v tsifrovuyu epokhu [On the relevance of fundamentalizing the mathematical preparation of students in pedagogical areas in the digital era]. *Obrazovaniye i nauka.* 2019. Vol. 21. No. 5. Pp. 87–112. DOI: 10.17853/1994-5639-2019-5-87-112.
5. *Podufalov N.D.* O nekotorykh metodologicheskikh problemakh razvitiya sistemy obrazovaniya [About some methodological problems of the development of the education system]. *Pedagogika.* 2019. Vol. 83. No. 8. Pp. 5–11.
6. *Testov V.A.* Tseli i soderzhaniye obucheniya matematike: sovremennyy etap [The goals and content of teaching mathematics: the modern stage]. *Matematicheskiy vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona.* 2018. No. 20. Pp. 48–56.
7. *Voronin A.S. Slovar' terminov po obshchey i sotsial'noy pedagogike* [Glossary of terms on general and social pedagogy]. Ekaterinburg: UGTU-UPI Publ., 2006. 135 p.
8. Hiebert, J., Lefevre, P. *Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis*. New York: Routledge, 1986, 113-133 pp. https://doi.org/10.4324/9780203063538
9. *Baroody A.J., Feil Y., Johnson A.R.* An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. Journal for Research in Mathematics Education. 2007.

Vol. 38. P. 115–131. DOI: 10.2307/30034952, https://www.jstor.org/stable/30034952 (accessed August 30, 2020).

10. *Byrnes J.P., Wasik B.A.* Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. Developmental Psychology. 1991. Vol. 27. P. 777–786. https://doi.org/10.1037/0012-1649.27.5.777 (accessed September 21, 2020).
11. *Byrnes J.P.* The conceptual basis of procedural learning. Cognitive Development. 1992. Vol. 7. Pp. 235–257. https://doi.org/10.1016/0885-2014(92)90013-H (accessed September 11, 2020).
12. *Rittle-Johnson B., Schneider M.* Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. Oxford handbook of numerical cognition. Oxford: Oxford University Press. 2014. P. 1118–1134. https://www.oxfordhandbooks.com/view/10.1093/oxfordhb/9780199642342.001.0001/oxfordhb-9780199642342-e-014 (accessed September 20, 2020).
13. *Crooks N.M., Alibali M.W.* Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. Developmental Review. 2014. Vol. 34. P. 344–377. https://doi.org/10.1016/j.dr.2014.10.001 (accessed September 2, 2020).
14. *Khinchin A.Ya. O formalizme v shkol'nom prepodavanii matematiki* [On formalism in the school teaching of mathematics]. Moscow: Izdatel'stvo Akademii pedagogicheskikh nauk RSFSR, 1963. – 204 p.
15. *Breitigam E.K., Karakozov S.D.* Tselostnost' sistemy bazovykh ponyatiy pri izuchenii matematiki v shkole i vuze [The integrity of the system of basic concepts in the study of mathematics at school and university]. *Mir nauki, kul'tury, obrazovaniya.* 2010. No. 3. Pp. 190–194. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18076976 (accessed September 4, 2020).
16. *Vladimirtseva S.A.* Osnovnyye napravleniya razvitiya teorii formirovaniya matematicheskikh ponyatiy v shkole [The main directions of development of the theory of the formation of mathematical concepts in school]. *Mir nauki, kul'tury, obrazovaniya*. 2008. No. 4. Pp. 103–107. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=11625982 (accessed September 5, 2020).
17. *Kuznetsova E.V.* K voprosu o vzaimosvyazi znaniya i ponimaniya v protsesse prepodavaniya matematiki [To the question of the relationship of knowledge and understanding in the process of teaching mathematics]. *Prepodavatel' XXI vek*. 2013. No. 3–1. Pp. 52–57. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20316558 (accessed September 6, 2020).
18. *Kuznetsova E.* Probabilistic ideas and methods in undergraduate mathematics: axiological aspects. IEJME: Mathematics Education. 2019. Vol. 14. No. 2. – Pp. 363–373. https://doi.org/10.29333/iejme/5720 (accessed August 30, 2020).
19. *Fielding-Wells J.* Dot plots and hat plots: supporting young students emerging understandings of distribution, center and variability through modeling. ZDM Mathematics Education. 2018. Vol. 50. P. 1125–1138. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0961-1 (accessed August 31, 2020).

20. *Konold C., Harradine A., Kazak S.* Understanding distributions by modeling them. International Journal of Computers for Mathematical Learning. 2007. Vol. 12(3). P. 217–230. https://doi.org/10.1007/s10758-007-9123-1 (accessed August 3, 2020).
21. *Pfannkuch M., Budgett S., Fewster R., Fitch M., Pattenwise S., Wild C.,; Ziedins I.* Probability Modeling and Thinking: What Can We Learn from Practice? Statistics Education Research Journal. 2016. Vol. 15. № 2. P. 11–37. http://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ15(2)_Pfannkuch.pdf (accessed August 13, 2020).
22. *Steel E.A., Liermann M., Guttorp P.* Beyond Calculations: A Course in Statistical Thinking. The American Statistician. 2019. Vol. 73 (1). Pp. 392–401. https://doi.org/10.1080/00031305.2018.1505657 (accessed August 23, 2020).
23. *Robert I.V. Teoriya i metodika informatizatsii obrazovaniya (psikhologo-pedagogicheskiy i tekhnologicheskiy aspekty)* [Theory and methods of informatization of education (psychological, pedagogical and technological aspects)]. Moskow: Institut informatizatsii obrazovaniya Publ., 2008. 274 p.

Original article submitted 25.07.2020
Revision submitted 19.09.2020