УДК 378.14:519.17

КОНСТРУИРОВАНИЕ УЧЕБНОГО КУРСА «ТЕОРИЯ ГРАФОВ» ДЛЯ БАКАЛАВРОВ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ

И.В. Сухан [1]

Кубанский государственный университет
350000, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149
E-mail: irina-sukhan@yandex.ru

Дисциплины, посвященные дискретной математике, способствуют формированию у студентов-бакалавров математических направлений подготовки компетенций, заявленных в образовательном стандарте. В статье рассматриваются различные варианты построения рабочей программы по одному из разделов дискретной математики – теории графов. В качестве оптимального предлагается спиральный вариант построения программы, позволяющий неоднократно возвращаться к уже изученным понятиям на качественно новом уровне.

Ключевые слова: *теория графов, дискретная математика, рабочая программа, образовательный стандарт, компетенции.*

На современном этапе развития общества обучение в российской высшей школе осуществляется в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего образования, который призван обеспечить сохранение единства образовательного пространства на всей территории РФ.

Государственный образовательный стандарт по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки (уровень бакалавриата), утвержденный приказом № 949 от 7 августа 2014 г., определяет следующие требования к подготовке бакалавра (выделим некоторые): умение применять методы математического и алгоритмического моделирования при анализе прикладных проблем; умение использовать базовые математические методы в научных исследованиях; умение производить контекстную обработку общенаучной и научно-технической информации, приводить ее к проблемно-задачной форме, осуществлять анализ и синтез информации.

В результате освоения программы бакалавриата у выпускника должны быть сформированы (среди прочих) следующие компетенции: готовность использовать фундаментальные знания в области дискретной математики и ма-

---

[1] *Ирина Владимировна Сухан*, старший преподаватель кафедры «Вычислительная математика и информатика».

тематической логики в будущей профессиональной деятельности; способность к самостоятельной научно-исследовательской работе; способность находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем; способность к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области; способность математически корректно ставить естественнонаучные задачи; знание постановок классических задач математики; способность строго доказывать утверждение, формулировать результат, видеть следствия полученного результата; способность использовать методы математического и алгоритмического моделирования при решении теоретических и прикладных задач; способность передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучаемого явления; способность использовать методы математического и алгоритмического моделирования при анализе управленческих задач в научно-технической сфере, экономике, бизнесе и гуманитарных областях.

Для решения этих задач в программу обучения на указанном и некоторых других направлениях включаются дисциплины, связанные с построением дискретных моделей. Частично или полностью такие курсы посвящены изучению теории графов. При построении рабочих программ таких дисциплин возникает ряд проблем, связанных с отбором элементов содержания.

На протяжении всей истории педагогики изучается формирование критериев отбора учебного материала на основе методологического анализа состояния и перспектив развития предметных научных отраслей. Результаты исследований позволяют на каждом историческом этапе оптимизировать «дистанцию» между достижениями науки и их отражением на уровне общего и профессионального образования.

Одним из методологических оснований для решения возникающих при этом теоретических и прикладных задач является утвердившееся в педагогике положение о том, что учебный предмет представляет собой не результат проецирования соответствующей отрасли науки на вузовское обучение, а итог дидактической переработки определенной системы знаний, умений и навыков, необходимых для овладения интеллектуальной, материально-практической, социальной или духовной деятельностью [1].

Учебную дисциплину можно представить как структуру, включающую несколько компонентов: идейно-теоретическое ядро, базисное (основное) содержание, супплетивно-функциональное (дополнительное) содержание и факультативную часть [2].

В.И. Гинецинский [2] приводит следующий вариант процедуры построения программы учебной дисциплины:

1. Определить предметную деятельность проектируемой учебно-познавательной деятельности: очертить круг объектов, вовлекаемых в познавательную деятельность, и задать перечень понятий, методов и проблем, с позиций которых выделенный круг объектов будет изучаться.

2. Сформулировать закономерности, которые должны быть усвоены в рамках учебной дисциплины.

3. Оценить соотношение между компонентами системы знаний, связанными с описанием, объяснением изучаемых явлений, обоснованием формулируемых закономерностей, выполнением познавательных действий, предписаний.

4. Сформулировать общие положения, на знание которых будет опираться формируемая учебная дисциплина.

5. Сформировать перечень заданий, выполнение которых будет выступать критерием усвоения содержания учебной дисциплины.

6. Сформулировать перечень задач, значимых с точки зрения развития конкретной профессионально-педагогической деятельности.

Теория и практика разработки учебных программ предоставляет три способа построения учебных программ: линейный, концентрический и спиральный [3].

Сущность линейного способа построения учебных программ состоит в том, что отдельные части учебного материала образуют непрерывную последовательность тесно связанных между собой и взаимообусловленных звеньев, входящих, как правило, только один раз. Таким образом, при линейном способе построения программы новые знания основываются на уже известном материале. Такое построение учебных программ несет в себе как положительные, так и отрицательные явления в обучении. Достоинство линейного способа расположения содержания учебной программы заключается в его экономичности во времени, поскольку исключается дублирование материала. В то же время линейный способ построения программы несет опасность забывания пройденного материала.

Концентрический способ построения учебных программ позволяет один и тот же материал (вопрос) излагать несколько раз, но с элементами усложнения, с расширением, обогащением содержания образования новыми компонентами, с углублением рассмотрения имеющихся между ними связей и зависимостей. Концентризм замедляет темп обучения, требует больших затрат учебного времени на изучение учебного материала, порой порождает у учащихся иллюзию знания тех вопросов, с которыми они повторно сталкиваются, что, естественно, снижает уровень их активности в обучении.

Негативных сторон линейного и концентрического способа построения учебных программ в значительной степени удается избежать при составлении учебных программ со спиралеобразным расположением в них учебного материала, благодаря которому удается сочетать последовательность и цикличность его изучения. Характерной особенностью этого способа является то, что ученики, не теряя из поля зрения исходную проблему, постепенно расширяют и углубляют круг связанных с ней знаний. В отличие от концентрической структуры, при которой к исходной проблеме возвращаются порой даже спустя большой промежуток времени, в спиральной структуре нет перерывов такого типа. Кроме того, в отличие от линейной структуры обучение, обладающее спиральной структурой, не ограничивается одноразовым представлением отдельных тем [4].

Опыт преподавания дискретной математики на факультете математики и компьютерных наук Кубанского государственного университета позволил сделать вывод, что для гибкого планирования теорию графов как учебную дисциплину удобно разбить на три модуля. Первый модуль – это основы теории графов: представление графов и изоморфизм, операции с графами, маршруты, метрические характеристики графов, деревья, связность и планарность графов. Второй модуль – это специальные вопросы теории графов: эйлеровы и гамильтоновы графы, раскраски графов, независимость и покрытия, паросочетания. Третий модуль – это вопросы, относящиеся к ориентированным графам.

По нашему мнению, в курс дискретной математики достаточно включить материал, относящийся к первому и второму модулям, а материал, относящийся к ориентированным графам, лучше оформить в специальный курс [5].

Например, на факультете математики и компьютерных наук КубГУ читается курс «Комбинаторные алгоритмы», который посвящен изучению классических алгоритмов решения задач на графах, построению новых алгоритмов и модификации и комбинации уже известных схем для решения конкретных задач, оценке эффективности указанных алгоритмов. Алгоритмы на ориентированных графах изучаются в рамках специальной дисциплины на отдельных профилях.

Остановимся подробнее на дисциплинах, изучающих неориентированные графы.

Цель изучения: формирование у студентов теоретических и методологических основ теории графов.

Задачи изучения: расширение сферы компетенции студентов в теории графов; овладение студентами понятийно-терминологическим аппаратом теории графов; овладение приемами применения теории графов к решению прикладных задач.

В результате изучения студент должен:

– знать основные понятия теории графов (определение графа, виды графов, способы задания графов, раскраска графов, циклы и пути в графах, алгоритмы на графах), необходимые для успешного изучения математических и теоретико-информационных дисциплин, решения задач, возникающих в профессиональной сфере;

– уметь формулировать и доказывать теоремы, применять методы теории графов для решения математических задач, построения и анализа моделей экономики, физики и информатики, самостоятельно решать классические задачи; осуществлять выбор адекватных алгоритмов для решения вышеуказанных задач;

– владеть навыками практического использования современного математического инструментария для решения и анализа задач, предусматривающими знание адекватных алгоритмов.

На этапе создания курса были отобраны следующие элементы содержания:

1. Основные понятия (Лемма о рукопожатиях. Теорема о вершинах с одинаковой степенью. Теорема о вершинах степени 0 или $n-1$. Изоморфизм графов. Матричное представление графов).

2. Операции с графами (Удаление ребер и вершин, добавление ребер и вершин, отождествление вершин, расщепление вершин. Объединение, пересечение, произведение графов. Гомеоморфные графы. n-мерные кубы как особый класс графов. Коды Грея).

3. Маршруты, цепи, циклы (Выявление маршрутов с заданным количеством ребер. Теорема о связи количества ребер, вершин и компонент связности в графе. Теорема о связности дополнения графа. Теорема о простом цикле. Признаки двудольности графа. Распознавание двудольности поиском в ширину).

4. Деревья (Признаки дерева. Три способа построения остова. Алгоритм построения остова обходом графа в ширину. Три способа построения остова. Алгоритм построения остова обходом графа в глубину. Фундаментальные циклы. Теорема о центре дерева. Теорема Кирхгофа о числе остовов. Теорема Кэли о числе помеченных деревьев. Алгоритм перевода дерева в последовательность. Теорема Кэли о числе помеченных деревьев. Алгоритм перевода последовательности в дерево. Поиск остова минимального веса. Алгоритм Краскала. Алгоритм Прима. Матричный алгоритм Прима).

5. Связность (Числа вершинной и реберной связности. Теорема о точках сочленения. Алгоритм поиска точек сочленения. Теорема о связи чисел вершинной и реберной связности. Свойства двусвязных графов. Теоремы о блоках графа).

6. Планарные графы (Теорема Эйлера о связи чисел вершин, ребер и граней. Непланарность графов K_5 и $K_{3,3}$. Критерии планарности. Триангуляция графа. Теорема Фари. Гамма-алгоритм укладки графа на плоскости).

7. Обходы в графах (Уникурсальные графы. Теорема Эйлера. Алгоритм Флёри построения эйлерова цикла. Эйлеров путь в графе. Лабиринты. Признаки гамильтонова графа).

8. Раскраски (Оценки хроматического числа. Конструирование хроматического полинома. Теорема Кёнига о бихроматических графах. Алгоритм построения правильной раскраски. Теорема Хивуда о раскраске планарных графов. Раскраска карт. Теоремы Шеннона и Визинга о хроматическом классе).

9. Независимость и покрытия (Оценки числа независимости. Построение независимого множества вершин. Оценки числа покрытия. Задача о наименьшем покрытии. Оценки кликового числа. Алгоритм выделения клик в графе. Теорема о наибольшем паросочетании. Алгоритм поиска максимального паросочетания. Матричный алгоритм поиска максимального паросочетания. Теорема о связи чисел α_0 и β_0. Теорема Холла о совершенном паросочетании).

При конструировании содержания курса мы стремились отобрать такие элементы, которые позволили бы оценить достоинства применения теории графов к решению практических задач в различных областях знаний, предоставить возможность обучающимся ознакомиться с постановками наиболее известных задач и основными алгоритмами на графах. К каждому элементу содержания необходимо подобрать корпус заданий и упражнений, решение которых позволило бы закрепить изученные свойства графов. При этом нужно разделить задания на обязательные (задания в основном репродуктивного характера, для решения которых достаточно знать определения, теоремы, формулы, алгоритмы), без умения выполнять которые невозможно считать курс усвоенным, и задания повышенного уровня сложности, в том числе творческие (решение которых состоит из нескольких логических шагов и требует более широкого круга знаний, умений и практических навыков), сама постановка которых стимулирует размышления над проблемами теории графов.

Однако при попытке выстроить курс в единую линию мы столкнулись с рядом проблем. На первом этапе был выстроен «скелет» курса, включающий минимум сведений из теории графов и позволяющий получить представление о графах «в первом приближении» [6]. Новые понятия при этом опирались на введенные ранее. Затем, при попытке «нарастить этот скелет мышцами», оказалось, что практически каждому новому понятию, свойству, утверждению непросто найти место в установленной линии. Зачастую оказывалось, что новое понятие тесно увязано с другими, позже вводимыми понятиями, или для него в данном разделе, где оно органично появляется, мало или вовсе нет содержательных задач, так как их решение также требует знания фактов из следующих разделов. Простое перемещение понятия в другую главу делало ее сумбурной, лишенной стройности.

Приведем несколько примеров.

Первый раздел «Основные понятия» начинается с определения графа и договоренности о его обозначении. Здесь логично будет указать устоявшиеся обозначения для некоторых графов: P_n, C_n, W_n. При этом нужно привести и их названия: цепи, циклы, колеса. Но формальное определение этих классов графов будет дано позже, после введения понятия маршрута в графе. Далее в этом же разделе после разбора понятия полных графов, естественно, вводится определение дополнения графа. При этом понятие самодополнительного графа ввести невозможно, так как пока еще не изучено отношение изоморфизма.

Рассмотреть способы задания графа (перечислением множеств вершин и ребер, рисунком или матричный) логично в начале изучения темы. Но матричный способ годится для помеченных графов. Помеченный граф можно определить как граф, вершинам (или ребрам) которого приписаны метки. Тогда, говоря об изоморфизме, можно привести теоремы об установлении изоморфизма графов на основе их матриц смежности и инцидентности. Но только лишь после введения понятия изоморфизма можно определить непомеченные графы как класс изоморфных графов.

Далее, говоря об операциях над графами, в частности об операции стягивания ребра, приводится утверждение о том, что любой непустой связный граф, отличный от тривиального, стягиваем к K_2, не не любой связный граф стягиваем к K_3. Здесь мы также сталкиваемся с противоречием. Понятие связного графа еще не определено. Приходится довольствоваться интуитивным пониманием этого факта. Также можно упомянуть о естественно возникающем в этом случае параметре графа – числе Хадвигера, которое связано с проблемой четырех красок. До этой темы (Раскраска графа) еще далеко, поэтому просто «подержим интригу».

Непросто обстоит дело и с распределением задач по разделам. Например, задачи, связанные с вышеупомянутыми самодополнительными графами, нашли свое место после стандартных заданий на установление изоморфизма графов, оторвавшись от группы задач о дополнительных графах.

Введя несколько основных операций над графами, можно расширить этот список, определив операции степени, композиции, конъюнкции, соединения, модульного произведения. Содержательных задач здесь немного, но ряд технических заданий можно привести, например на построение результата этих операций для конкретных заданных графов [7]. Однако, например, решение задачи нахождения наименьшего числа k, при котором k-я степень связного графа является полным графом (№ 1.4.9 [7]), опирается на понятие диаметра; по нашей классификации, такое задание должно быть включено в следующий раздел, где оно, однако, смотрится «заблудившимся». В таких случаях можно предложить вводить определение, использующееся в одной или нескольких задачах, непосредственно в тексте задачи. Но это нарушает стройность нашего небольшого учебного пособия [8]. Список подобных примеров можно было бы продолжить.

Все это привело к следующим выводам.

Выстроить курс линейно можно, лишь сократив материал до некоторого минимума. При этом можно только поверхностно познакомить учащихся с теорией графов.

В условиях ограниченного учебного времени также не представляется возможным выстроить курс концентрически. Такую возможность имеет смысл рассматривать, если до того обучающиеся прослушали некоторый пропедевтический курс, в рамках которого были введены основные термины и утверждения. Но так как студенты вуза обладают разной подготовкой, этот вариант остается теоретическим.

Третий способ, интегрирующий первые два, возможно, станет выходом из сложившейся ситуации. Придерживаясь намеченной линейной структуры курса, можно вводить строгие определения в рамках изучаемой темы, а недостающие «анонсировать» на неформальном уровне. Позже, когда до них дойдет очередь, их восприятие будет более спокойным и естественным, ведь эти понятия и утверждения уже знакомы.

Не стоит забывать, что при движении вперед всегда появляются вопросы и задачи, затрагивающие пройденный материал. Известные свойства объектов теперь можно применить к новым понятиям. Равномерное распределение задач по курсу способствует удержанию пройденного материала в активном запасе, чего невозможно добиться при линейном прочтении курса.

Таким образом, двигаясь вперед и вглубь, мы строим сложносплетенную систему понятий, объектов и отношений, свойств и теорем, составляющих теорию графов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Макаров С.И.* Otbor soderzhaniya uchebnoj distsipliny pri sozdanii ‘lectronnyh uchebnikov Отбор содержания учебной дисциплины при создании электронных учебников // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2012. – Вып. 2–2. – Т. 14. – С. 321–323.
2. *Гинецинский В.И.* Основы теоретической педагогики: учеб. пособие. – СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1992. – 154 с.
3. Педагогика: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / П.И. Пидкасистый, В.А. Мижериков, Т.А. Юзефавичус; под ред. П.И. Пидкасистого. – 2-е изд., перераб. и доп. – М: Академия, 2014. – 624 с.
4. *Куписевич Ч.* Основы общей дидактики. – М.: Высш. школа, 1986. – 368 с.
5. *Сухан И.В.* Ориентированные графы: учеб. пособие. – Краснодар: КубГУ, 2016. – 124 с.
6. *Кравченко Г.Г., Иванисова О.В., Сухан И.В., Завалей Е.Г.* Теория графов: учеб. пособие. – Краснодар: КубГУ, 2011. – 105 с.
7. *Емеличев В.А., Зверович И.Э., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И.* Теория графов в задачах и упражнениях: более 200 задач с подробными решениями. – М.: Либроком, 2013. – 416 с.
8. *Сухан И.В., Иванисова О.В., Кравченко Г.Г.* Графы: учеб. пособие. Изд. 2-е, испр. и доп. – Краснодар: КубГУ, 2015. – 175 с.

Поступила в редакцию 17.02.17;
в окончательном варианте 6.03.17

UDC 378.14:519.17

THE BUILDING OF THE EDUCATIONAL COURSE «THE THEORY OF GRAPHS» FOR THE BACHELORS OF THE MATHEMATICAL DEPARTMENT

I.V. Sukhan[1]

Kuban State University
149, Stavropolskaya st., Krasnodar, 350000
E-mail: irina-sukhan@yandex.ru

The Disciplines, which deal with the discrete mathematics, contribute to the formation the competencies among the students- bachelors of mathematical department, which

[1] *Irina V. Sukhan*, Senior Lecturer of Computational Mathematics and Informatics Department.

the Educational Standart requires. This article deals with the different variants of building the work program of one of the parts of the discrete mathematics - the theory of graphs. For the optimal variant the author offers the spiral variant of building the work program, which allows to turn back many times for the studied concepts on the qualitatively new level.

Key words: *the theory of graphs, discrete mathematics, the work program, Educational Standard, competencies.*

REFERENCES

1. *Makarov S.I.* Otbor soderzhaniya uchebnoj distsipliny pri sozdanii ‘lectronnyh uchebnikov [The selection of the content of the educational discipline for creation the electronic textbooks] // Proceedings of the Samara scientific center of Russian Academy of Sciences. 2012. Part. № 2-2. Vol 14. P. 321–323.
2. *Ginezinskii V.I.* Osnovy teoreticheskoj pedagogiki: uchebnoe posobie SPb [The bases of theoretical pedagogy: the educational material SPb]: The Publishing house of the St.-Petersburg. university, 1992. 154 p.
3. Pedagogika: uchebnik dlya studentov uchrezhdenij vysshego professional’nogo obrazovaniya [Pedagogy: the textbook for the students, who want to get higher professional education] / P.I. Pidkasistyj, V.A. Migeriкov, T.A. Uzefavichus; after P.I. Pidkasistii’s redaction. – the second issue, reworked and added. – Moscow: The Publishing center «Academy», 2014. 624 p.
4. *Кupisevich Ch.* Osnovy obschej didaktiki [The bases of general didactics]. – Moscow: The Higher School, 1986. 368 p.
5. *Sukhan I.V.* Orientirovannye grafy: uchebnoe posobie [The Oriented graphs: the educational material]. – Krasnodar: Kuban State University, 2016. 124 p.
6. *Kravchenko G.G., Ivanisova O.V., Sukhan I.V., Zavalei E.G.* Teoriya grafov: uchebnoe posobie [The theory of graphs: the educational material]. – Krasnodar: Kuban State University, 2011. 105 p.
7. *Емelichev B.A., Zverovich I.E., Melniкov O.I., Sarvanov B.I., Tishкevich P.I.* Teoriya grafov v zadachah I uprazhneniyah: bolee 200 zadach s podobnymi resheniyami [The theory of graphs in exercises and tasks: More than 200 tasks with detailed solutions]. – Moscow: The Book house «LIBROKOM», 2013. 416 p.
8. *Sukhan I.V., Ivanisova O.V., Kravchenko G.G.* Grafy: uchebnoe posobie, izdanie 2-e, ispravlennoe i dopolnennoe [The graphs: the educational material, the second issue, corrected and added]. – Krasnodar: Kuban State University, 2015. 175 p.

Original article submitted 17.02.17;
revision submitted 6.03.17