УДК 378.14

ПРОФЕССИОНАЛЬНО НАПРАВЛЕННЫЙ АСПЕКТ ИЗУЧЕНИЯ РАЗДЕЛА «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА» ПРИ ПОДГОТОВКЕ СПЕЦИАЛИСТОВ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

***И.Н. Павлова*[1], *Н.В. Спиридонова*[2]**

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
[1]E-mail: inp-63@mail.ru
[2]E-mail: nvshkolina@mail.ru

Показана необходимость формирования математической компетенции студентов экономических специальностей в соответствии с их квалификацией. Обосновано практическое использование элементов линейной алгебры для решения экономических задач.

***Ключевые слова*:** *экономические задачи, элементы линейной алгебры, профессионально ориентированные примеры.*

Новые требования к выпускникам вузов влекут за собой изменения в системе образования: создаются новые государственные стандарты, изменяются программы обучения, вводится понятие компетентности специалиста. Основной задачей инженерного образования становится формирование у студентов не только определенных знаний, умений и навыков, но и особых компетенций, сфокусированных на способности применения этих знаний, умений и навыков в будущей профессиональной деятельности [1]. Таким образом, можно говорить о том, что требование профессиональной направленности учебно-воспитательного процесса становится основополагающим для каждой преподаваемой в вузе учебной дисциплины. Математика – основа технического образования, и в практической деятельности инженера призвана решать профессиональные задачи. Поэтому очевидно, что математическую подготовку в техническом университете следует направлять в русло формирования математической компетенции у студентов, и рационально делать это

---

[1] *Ирина Николаевна Павлова,* преподаватель кафедры высшей математики и прикладной информатики.
[2] *Наталья Владимировна Спиридонова*, преподаватель кафедры высшей математики и прикладной информатики.

на профессионально ориентированных примерах. От качества математической подготовки в наибольшей степени зависит уровень сформированности профессиональной компетентности будущего специалиста [2]. А значит, математика должна преподаваться не как изолированная, обособленная дисциплина, она должна быть содержательной относительно ее прикладной значимости и профессиональной направленности. Иными словами, содержание математической подготовки студентов должно быть сформировано в соответствии с квалификацией будущего специалиста, в частности специалиста экономического профиля. Поэтому основная цель изучения курса высшей математики в техническом университете – это подготовка пласта знаний для изучения в дальнейшем спецпредметов и решения профессиональных задач в соответствии с каждой отдельно взятой специальностью. Начиная с первых занятий необходима тесная дидактическая междисциплинарная связь. К сожалению, стоит констатировать тот факт, что при имеющийся на кафедре значительной методической базе пока эта связь слаба и преемственности дисциплин практически не существует. А знания студентов, не закрепленные устойчивой мотивацией, связанной с их будущей профессиональной деятельностью, как правило, имеют плохую сохраняемость. Необходима убедительная демонстрация «полезности» овладения учебным материалом на лекциях, практических, лабораторных занятиях, при самостоятельной работе студентов, а также в методических указаниях и учебных пособиях к этим занятиям [3].

Учитывая направление специальностей экономического профиля, можно утверждать, что задачей изучения раздела математики «линейная алгебра» является формирование у студентов соответствующих знаний, практических умений и навыков применения методов линейной алгебры и математического аппарата, связанного с ней, при решении практических задач. Изучение раздела «линейная алгебра» имеет чрезвычайное значение для студентов экономических специальностей. Это связано с тем, что значительная часть математических моделей экономических процессов и объектов, а также представление различных совокупностей числовых данных записывается в достаточно компактной и простой матричной форме, что является эффективным, а главное, удобным способом систематизации различной информации (например, это могут быть различные статистические расчеты, сведения об объеме производимой продукции, затратах сырья, трудовых ресурсов, рабочего времени, производительности труда на различных объектах производства и т. д.). Кроме того, это позволяет упростить и облегчить процесс поиска того или иного решения поставленной задачи, делая основные выкладки и результаты компактными, более наглядными и легко обозримыми.

Например, рассмотрим соотношения между секторами экономики (табл. 1). Данная таблица может быть записана в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1500 & 1700 & 1800 \\ 2000 & 3100 & 700 \\ 1500 & 1600 & 3000 \end{pmatrix}$$

В ней, например, элемент $a_{21} = 2000$ показывает, сколько расходных материалов потребляет химическая промышленность, элемент $a_{33} = 3000$ – сколько трудовых ресурсов необходимо деревообрабатывающей промышленности, а элемент $a_{12} = 1700$ – сколько электроэнергии потребляет металлургия.

Таблица 1

Соотношения между секторами экономики

Показатель	Химическая промышленность	Металлургия	Деревообрабатывающая промышленность
Энергетические ресурсы	1500	1700	1800
Расходные материалы	2000	3100	700
Трудовые ресурсы	1500	1600	3000

Зачастую даже простейшие экономические задачи требуют от инженера-экономиста громоздких вычислений. Решение многих таких задач, связанных, например, с расчетами норм расхода или потребления сырья для какого-либо предприятия, объемов выпускаемой продукции за определенный отчетный период, расходов на транспортировку готовой продукции, с оптимизацией перевозок и т. д., можно осуществить, используя математический аппарат линейной алгебры.

Рассмотрим примеры экономических задач, при решении которых используются элементы линейной алгебры.

Пример 1. Предприятие производит продукцию трех видов и использует сырье двух типов. Нормы затрат сырья на единицу продукции каждого вида заданы матрицей А=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Стоимость единицы сырья каждого типа задана матрицей В=$\begin{pmatrix} 10 & 15 \end{pmatrix}$. Каковы общие затраты предприятия на производство 100 единиц продукции первого вида, 200 единиц продукции второго вида и 150 единиц третьего вида? [4]

Решение. Чтобы определить стоимость сырья для производства единицы продукции каждого вида, следует умножить матрицу стоимости единицы сырья B на матрицу норм затрат сырья A:

$$C = B \cdot A = \begin{pmatrix} 10 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 55 & 90 \end{pmatrix}.$$

Пусть матрица $D = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix}$ задает объемы производства продукции, тогда суммарные затраты на производство продукции равны произведению матрицы C на матрицу D:

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 35 & 55 & 90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix} = 35 \cdot 100 + 55 \cdot 200 + 90 \cdot 150 = 28000.$$

Ответ: 28000 усл. ед.

Пример 2. Рассмотрим четырехсекторное описание экономики, в котором выделены две отрасли: сельское хозяйство и промышленность; один первичный фактор труда и государственный сектор, который потребляет продукцию обеих отраслей и использует труд. Государственный сектор ничего не производит для экономики, и его потребление представляет собой конечный спрос на товары, производимые в других секторах. В процессе производства каждая отрасль потребляет некоторое количество продукции другой отрасли, а также труд. Рабочая сила нуждается в продукции обеих отраслей и наряду с этим в затратах труда для своего воспроизводства. Трудовые ресурсы могут быть свободно импортированы и экспортируемы. Таким образом, никогда не может быть безработицы или излишнего спроса на труд. Основной капитал и запасы продукции поддерживаются на одном и том же уровне в течение всего периода. Наблюдая за потоками продукции между четырьмя секторами экономики, составим таблицу «Затраты – выпуск» (табл. 2).

Таблица 2

Затраты – выпуск

Производственный сектор	Потребляющий сектор				
	С/х	Промышленность	Трудовые ресурсы	Госсектор (конечный спрос)	Всего
Сельское хозяйство (с/х), т	500	300	1300	500	2600
Промышленность, число машин	800	700	600	900	3000
Трудовые ресурсы, число занятых	800	1600	600	600	3600

Сумма показателей в строках дает общий выпуск каждой отрасли и суммарное число занятых. Сумма показателей по столбцам показывает затраты данного сектора, необходимые для производства всего объема продукции, следовательно, каждый столбец описывает производственную функцию данного сектора. Например, первый столбец характеризует основной производственный процесс, который в текущем периоде применяется в сельском хозяйстве. Для производства 2600 т продукции сельского хозяйства требуется 500 т сельскохозяйственной продукции, 800 машин и 800 работников.

Определить валовой выпуск продукции для конечного спроса, определяемого матрицей-столбцом Y = $\begin{pmatrix} 1000 \\ 1200 \\ 800 \end{pmatrix}$.

Решение. Пусть x_i – валовый выпуск продукции i = 1, 2, 3; y_i – конечный спрос на продукцию i, i = 1, 2, 3.

Валовый выпуск каждого вида продукции должен быть равен сумме продукции, использованной при производстве всех видов продукции, плюс конечный спрос на эту продукцию, т. е.

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j + y_i,\ i \in \{1,2,3\}, \tag{1}$$

где a_{ij} – количество продукции i, используемое при производстве единицы продукции j.

Предположим, что цены относительно стабильны и технология меняется медленно, тогда если государственный сектор предполагает потребить 1000 т продукции сельского хозяйства, 1200 машин и нанять 800 человек в следующем периоде, то определим, каковы должны быть трудовые ресурсы и уровни выпусков продукции в каждом производственном секторе. Нужно найти элементы матрицы X по заданным элементам матрицы Y.

Перепишем уравнение (1) в матричном виде:

$$X – AX=Y, \text{ или } (E – A)X=Y, \tag{2}$$

где X, Y – матрицы-столбцы, A – матрица коэффициентов прямых затрат; все элементы неотрицательны.

Чтобы найти матрицу X, умножим обе части уравнения (2) на обратную матрицу $(E – A)^{-1}$ слева. Тогда получим:

$$X = (E – A)^{-1}Y.$$

Таким образом, для того чтобы найти валовый выпуск продукции, необходимо найти обратную матрицу $(E – A)^{-1}$, предварительно определив элементы матрицы A, воспользовавшись предположением о пропорциональности зависимости между затратами и объемами производства, т. е. линейными однородными функциями производственных затрат: $x_{ij} = a_{ij}x_j$.

Тогда $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$, и элементы А равны

$$a_{11} = \frac{500}{2600} = \frac{5}{26};\ a_{21} = \frac{800}{2600} = \frac{4}{13};\ \text{и т.д., т.е.:}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{500}{2600} & \frac{300}{3000} & \frac{1300}{3600} \\ \frac{800}{2600} & \frac{700}{3000} & \frac{600}{3600} \\ \frac{800}{2600} & \frac{1600}{3000} & \frac{600}{3600} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{26} & \frac{1}{10} & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{13} & \frac{7}{30} & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{13} & \frac{8}{15} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы А удовлетворяют условиям:

1) $a_{11} = \frac{5}{26} < 1, a_{22} = \frac{7}{30} < 1, a_{22} = \frac{7}{30} < 1;$

2) $a_{12} \cdot a_{21} = \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{13} = \frac{4}{130} < 1, \quad a_{13} \cdot a_{31} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{13} = \frac{4}{26} < 1,$

$a_{23} \cdot a_{32} = \frac{1}{6} \cdot \frac{8}{15} = \frac{8}{90} < 1;$

3) $a_{11} + a_{12} + a_{13} = \frac{5}{26} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{103}{130} < 1,$

$a_{21} + a_{22} + a_{23} = \frac{4}{13} + \frac{7}{30} + \frac{1}{6} = \frac{276}{390} < 1,$

$a_{31} + a_{32} + a_{33} = \frac{4}{13} + \frac{8}{15} + \frac{1}{6} = \frac{211}{390} < 1;$

4) норма матрицы $\|A\| = \max\limits_{j} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} =$

$= \max\{\frac{5}{26} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2}; \frac{1}{10} + \frac{7}{30} + \frac{8}{15}; \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\} = \frac{26}{30} < 1.$

Значит, матрица А является продуктивной и для нее выполняется теорема Фробениуса – Перрона: «Все собственные значения матрицы по модулю меньше единицы, а наибольшее собственное значение положительно» [5].

Элементы матрицы (Е – А) равны

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{26} & \frac{1}{10} & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{13} & \frac{7}{30} & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{13} & \frac{8}{15} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{26} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{4}{13} & \frac{23}{30} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{4}{13} & -\frac{8}{15} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы (E – A):

$$|E-A| = \frac{21}{26}\cdot\frac{23}{30}\cdot\frac{5}{6} + \left(-\frac{1}{10}\right)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(-\frac{4}{13}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{4}{13}\right)\cdot\left(-\frac{8}{15}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{23}{30}\cdot\left(-\frac{4}{13}\right) - \left(-\frac{1}{10}\right)\cdot\left(-\frac{4}{13}\right)\cdot\frac{5}{6} - \frac{21}{26}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(-\frac{8}{15}\right) = \frac{999}{4680} \approx 0{,}213$$

Находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы (E – A):

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \frac{23}{30} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{8}{15} & \frac{5}{6} \end{vmatrix} = \frac{23}{30}\cdot\frac{5}{6} - \left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(-\frac{8}{15}\right) = \frac{99}{180} \approx 0{,}55$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -\frac{4}{13} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{4}{13} & \frac{5}{6} \end{vmatrix} = -\left(\left(-\frac{4}{13}\right)\cdot\frac{5}{6} - \left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(-\frac{4}{13}\right)\right) = \frac{24}{78} \approx 0{,}308$$

и так далее.

Составим присоединенную матрицу C из алгебраических дополнений, причем алгебраические дополнения строк запишем в столбцы:

$$C = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}35 & 0{,}4 \\ 0{,}308 & 0{,}519 & 0{,}288 \\ 0{,}4 & 0{,}462 & 0{,}588 \end{pmatrix}.$$

Умножая матрицу C на множитель, равный обратной величине определителя Δ, получаем обратную матрицу:

$$(E-A)^{-1} = \frac{1}{\Delta}\cdot C = \begin{pmatrix} 2{,}582 & 1{,}643 & 1{,}878 \\ 1{,}446 & 2{,}437 & 1{,}352 \\ 1{,}878 & 2{,}169 & 2{,}761 \end{pmatrix}.$$

Уровень производства сельского хозяйства и промышленности, необходимой численности работников определим, вычислив произведение матрицы $(E-A)^{-1}$ на матрицу Y= $\begin{pmatrix} 1000 \\ 1200 \\ 800 \end{pmatrix}$:

$$X = \begin{pmatrix} 2{,}582 & 1{,}643 & 1{,}878 \\ 1{,}446 & 2{,}437 & 1{,}352 \\ 1{,}878 & 2{,}169 & 2{,}761 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1000 \\ 1200 \\ 800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6056 \\ 5452 \\ 6689{,}6 \end{pmatrix}.$$

Ответ: таким образом, для удовлетворения новых показателей спроса необходимо будет произвести 6056 т продукции сельского хозяйства, 5452 машин и нанять примерно 6690 работников [4].

Пример 3. Найти расчетные объемы работ (число часов использования оборудования), которые окупят затраты на эксплуатацию. Расценки на проведение соответствующих работ указаны в табл. 3.

Таблица 3

Расценки на проведение работ

Виды работ	Нормативы по видам оборудования (число часов)			Полные затраты на эксплуатацию
	Механическое	Тепловое	Энергетическое	
Техническое обслуживание	3	1	4	85
Текущие услуги	2	2	3	82
Капитальный ремонт	10	20	15	580

Решение. Пусть x_1 – количество часов использования механического оборудования, x_2 – теплового, x_3 – энергетического. Тогда в соответствии с расценками на проведение соответствующих работ запишем систему:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 85, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 82, \\ 10x_1 + 20x_2 + 15x_3 = 580. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу полученной системы уравнений, решим ее методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 4 & 85 \\ 2 & 2 & 3 & 82 \\ 10 & 20 & 15 & 580 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 4 & 85 \\ 0 & 4 & 1 & 76 \\ 0 & 50 & 5 & 890 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 4 & 85 \\ 0 & 4 & 1 & 79 \\ 0 & 0 & 30 & 240 \end{array}\right)$$

Получим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 85, \\ 4x_2 + x_3 = 79, \\ 30x_3 = 240. \end{cases}$$

Находим

$$\begin{cases} x_1 = 12, \\ x_2 = 17, \\ x_3 = 8. \end{cases}$$

Ответ: таким образом, для того чтобы окупились затраты на эксплуатацию при данных расценках, необходимо 12 ч для механического оборудования, 17 ч для теплового и 8 ч для энергетического.

Итак, приведенные примеры показывают, что знание элементов линейной алгебры – умение оперировать матрицами, выполнять различные действия с ними, рассматривать и находить обратные матрицы, вычислять как вспомогательное средство определители, решать различными способами системы линейных уравнений и т. д. – позволяет решать различные экономические задачи, а следовательно, является неотъемлемой частью подготовки студентов экономического профиля технического вуза. Кроме этого, если студент будет знать, что тот или иной математический аппарат полезен при решении профессиональных задач, можно ожидать изменения его отношения к изучению курса высшей математики как предмета, и вследствие этого возрастет качество выполняемой работы как в аудитории, так и при самостоятельных занятиях студентов [3].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Похолков Ю., Чучалин А., Боев О.* Бакалавр-инженер: реальность и перспективы для России // Высшее образование в России. – 2004. – № 9. – С. 3–14.
2. *Павлова И.Н., Евдокимов М.А.* Профессионально ориентированные задачи как средство формирования профессиональных компетенций // Электроэнергетика глазами молодежи: научные труды международной научно-технической конференции: сборник статей. – В 3 т. – Самара: СамГТУ, 2011. – Т. 3. – 239 с.
3. *Павлова И.Н., Евдокимов М.А.* Повышение качества обучения путем совершенствования самостоятельной работы студентов // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Психолого-педагогические науки. – 2012. – № 1(17). – С. 145–150.
4. *Булдык Г.М.* Сборник задач и упражнений по высшей математике с примерами решений. – Мн.: Юнипресс, 2002. – 33 с.
5. *Колесников А.Н.* Краткий курс математики для экономистов. – М.: Высш. шк., 1999. – 208 с.

Поступила в редакцию 13.09.2016;
в окончательном варианте 30.09.2016

UDC 378.14

PROFESSIONALLY ORIENTED ASPECT OF STUDYING THE BRANCH "LINEAR ALGEBRA" IN TRAINING ECONOMIC PROFILE SPECIALISTS

***I.N. Pavlova*[1], *N.V. Spiridonova*[2]**

---

[1] *Irina N. Pavlova*, Lercture of Advanced Mathematics and Applied Information Department.

[2] *Natalya V. Spiridonova*, Lercture of Advanced Mathematics and Applied Informatio Department.

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100
[1]E-mail: inp-63@mail.ru
[2]E-mail: nvshkolina@mail.ru

The article shows the necessity of forming of mathematical competence of economic profile students in accordance with the qualification. Practicalapplication of linear algebra elements for of economic problems solution is represented by the authors.

Keywords: *economic problem, elements of linear algebra, professionally oriented examples.*

REFERENCES

1. *Pokholkov Yu., Chuchalin And., Boev O*. Bakalavr-inzhener: reality and prospects for Russia // the Higher education in Russia. 2004. No. 9. Page 3–14.
2. *Pavlova I.N., Evdokimov M.A.* Professionally oriented problems as means of forming professional competences // Power industry from the point of view of youth: scientific works of the international scientific and technical conference: collection of articles. – In 3 parts. – Samara: SamGTU, 2011. – part. 3. – 239 pages.
3. *Pavlova I.N., Evdokimov M.A.* Enhance learning by improving the independent work are the students // Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Psikhologo-pedagogicheskie nauki. 2012. No. 1(17). – 145–150 pp.
4. *Buldyk G.M*. The collection of tasks and exercises on the higher mathematics with examples decisions / Mn.: LLC Yunipress, 2002. – page 33.
5. *Kolesnikov A.N.* A short course of mathematics for economists. – M.: Vyssh. school., 1999. – 208 pages.

Original article submitted 13.09.2016;
revision submitted 30.09.2016