ФОРМИРОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ СПОСОБОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

С.П. Гаврюченкова

Нижегородский государственный педагогический университет им. Козьмы Минина
603950, г. Нижний Новгород, ул. Ульянова, 1
E-mail: gavryuchenko@mail.ru

Изменение целей, задач и технологий в образовании требует изменений в системе подготовки учащихся. Целью образования является подготовка человека к будущему участию в деятельности человеческого общества, содержанием образования является освоение общих методов человеческой деятельности. Для этого надо учить обобщать, анализировать информацию, а не механически запоминать. В статье намечены пути решения этого вопроса: представлена система активизации самостоятельности учащихся в образовательном процессе при решении математических задач и факторы, способствующие развитию мышления учащихся в контексте проводимых реформ образования. Выделены и описаны аспекты педагогической поддержки учащихся. Подчеркивается особая роль педагога в формировании творчески развитой личности. Обсуждается, что в связи с этим приходится делать учителю. Предложена методика изучения математических понятий, стимулирующая переход к более высокому уровню развития самостоятельности учащихся. Рассмотрены варианты организации деятельности на уроке. Представлены результаты контрольных и тестовых работ, анкетирования. Результаты проведенного исследования подтверждают эффективность описанной системы активизации самостоятельности учащихся в образовательном процессе.

Ключевые слова: образовательный процесс, педагогическая поддержка, математические задачи, роль педагога, математические способности учащихся.

Изменения, происходящие в современной российской образовательной системе, в том числе введение выпускных экзаменов по математике в форме ЕГЭ, требуют от учащихся умения не только решать основные типы математических задач, но и ориентироваться в новых ситуациях. Однако при решении математических задач учащиеся допускают много различного рода ошибок, свидетельствующих о том, что у них сформированы лишь частные способы решения конкретных задач, которые они не могут самостоятельно перенести на другие виды задач. В связи с этим стоит вопрос о необходимости формирования общих приемов решения основных типов математических задач, позволяющего усваивать способы их решения не формально, а осознанно.

Проблема формирования у учащихся обобщенных способов (приемов) математической деятельности неоднократно обсуждалась в методической литературе. По мнению многих исследователей (О.Б. Епишевой, В.И. Крупича, С.Б. Суворовой и др.), в деятельности учащихся по решению задач необходимо выявлять слагающие ее действия, которые являются составной частью операций, что способствует обучению умениям осуществлять поиск решения задач. Как замечает Л.Г. Иванова [1], использование обобщенного образа в качестве опоры дает учащимся возможность широко использовать варианты действий, составляющих его. Часто проблему формирования у учащихся способов математической деятельности, в частности решения математических задач, связывают с проблемой алгоритмизации обучения.

Светлана Павловна Гаврюченкова, аспирант кафедры математики и математического образования.

А.А. Столяр [2, с. 140] пишет, что математика полна алгоритмов для решения задач различных классов, поэтому обучение математике неизбежно включает обучение алгоритмам.

Важной чертой алгоритма является жесткость выполнения входящих в него операций. Однако применительно к формированию у учащихся обобщенных способов математической деятельности целесообразно говорить не об алгоритмах, а о предписаниях, задающих обобщенные способы действий, т. е. обобщенно указывающих логические схемы выполнения действий [3, с. 85]. В предписаниях фиксируется определенная последовательность выполнения необходимых операций. В отличие от алгоритмов в них нет жесткости выполнения операций. Операции могут допускать различные способы выполнения. При этом деятельность учащихся регламентируется в общих чертах, предоставляющих возможности для проявления инициативы, но вместе с тем достаточных для руководства процессом усвоения необходимых действий [3, с. 85].

Л.Н. Ланда [4] предложил называть такие предписания предписаниями алгоритмического типа. Они не обладают требованием строгой последовательности операций, но допускают обращение к смыслу и содержанию объектов, которыми оперируют учащиеся. В связи с этим актуальной является задача отыскания рациональных форм предписаний, позволяющих учащимся более эффективно овладеть некоторыми приемами мышления.

Алгоритмические предписания частично отражают смысл понятия «обобщенные способы действий», допускающих обобщение, обладающих свойством переносимости на другие задачи, дающих общее направление деятельности по решению задач, не регламентирующих каждый шаг их решения. Анализ действий позволяет избежать слепого применения шаблонов, видеть рациональный способ решения задачи, способствует формированию системы способов решения математических задач.

Н.Ф. Талызина считает, что в процессе решения задач, как правило, используются не отдельные действия, а целые системы. Обычно такую совокупность действий, приводящих к решению задач определенного класса, называют приемом, способом или методом решения. То есть имеются различные подходы к определению понятия обобщенных способов (приемов) деятельности. И.С. Якиманская и Е.Д. Божович различают понятия «прием» и «способ» деятельности. Прием в виде образца, алгоритма, правила должен входить в содержание знаний и описываться в учебнике или задаваться учителем. Способ – это открытие самого ученика, в нем проявляется накопленный учеником опыт познания. «Способ учебной работы – устойчивое индивидуальное образование, включающее в себя мотивационную и операционную сторону познавательной деятельности, – характеризует индивидуальную изобретательность ученика к проработке учебного материала разного научного содержания, вида и формы, устойчивость предпочтения, продуктивность использования знаний» [5, 6]. В связи с тем, что педагогическая поддержка, оказываемая учащимся при обучении математике, направлена на формирование их готовности к самообучению, будем придерживаться понятия «обобщенные способы математической деятельности», смысл которого соответствует цели исследования.

Под обобщенными способами математической деятельности будем понимать способы деятельности, полученные на основе анализа частных способов путем выделения общего содержания деятельности по решению конкретных математических задач. Усваиваемые в процессе учения общие способы учебной деятельности должны трансформироваться в индивидуальные способы работы ученика, в результате чего происходит его развитие [7, с. 24-32].

Однако составы обобщенных способов решения математических задач основных типов в явном виде в учебных, учебно-методических пособиях не представлены. Анализируя сложившуюся систему обучения, психологи пришли к выводу, что путь обучения приемам учебной деятельности, который принят в школе, является малоэффективным. Дело в том, что обычно цель усвоения того или иного способа не выделяется в качестве специальной учебной задачи; ученики осваивают способ неосознанно, механически, в силу лишь многократного возвращения к аналогичным ситуациям. Н.Ф. Талызина указывала как на недостаток в системе обучения на то обстоятельство, что учат знаниям, но не учат действиям со знаниями. Эти действия необходимо представить учащимся в явном виде. В учебниках математики далеко не всегда перечисляется последовательность действий, с помощью которых выполняется решение задач, особенно геометрических. Чаще всего способ решения какого-то класса задач показывается при разборе конкретной задачи из этого класса [1], а способы решения основных классов задач не являются предметом специального изучения или теоретической частью курса математики. Поэтому суть педагогической поддержки, оказываемой учащимся, видится в целенаправленном формировании у них обобщенных способов решения математических задач, в обучении их умению анализировать свою умственную деятельность и управлять ею, в организации обучения переносу усвоенных способов решения задач на различные классы задач.

В основе формирования у учащихся обобщенных способов математической деятельности должен быть компетентностный подход. Он позволяет переносить сформированные обобщенные способы математической деятельности (поиск математических закономерностей, способов решения математических задач) на материал других наук, а также на изучение закономерностей окружающего мира.

Основопологающим для построения методического обеспечения процесса формирования обобщенных способов математической деятельности является деятельностный подход, предполагающий усвоение учащимися знаний в процессе выполнения целенаправленной деятельности на конкретном предметном содержании. Деятельностный подход способствует не формированию частных приемов решения конкретных задач, а обучению самостоятельному выделению содержания деятельности по решению конкретных задач.

Но формировать обобщенные способы математической деятельности у всех учащихся на одном уровне, без учета индивидуальных особенностей, невозможно. Поэтому в силу индивидуальных особенностей и склонностей разных учащихся при формировании обобщенных способов математической деятельности важен личностно ориентированный подход, учитывающий наиболее соответствующий учащимся вид учебно-познавательной математической деятельности. Данный подход имеет широкие возможности для личностной ориентации обучения школьников математике, т. к. позволяет определять необходимое количество задач и их сложность для каждого ученика индивидуально. В связи с этим циклы задач, направленные на формирование обобщенных способов математической деятельности у учащихся с более высоким уровнем подготовки по математике, должны обеспечивать достижение наиболее высокого уровня формирования обобщенных способов математической деятельности. Это достигается через самостоятельное моделирование учащимися состава обобщенного приема, установление границ его применения, а также создание на базе сформированного приема новых обобщенных приемов математической деятельности (например решения другого класса математических задач). Учащиеся с меньшей математической подготовкой дополняют блок базисных задач такими задачами, к которым может быть применен полученный обобщенный прием (эти задачи

могут быть составлены учащимися самостоятельно), а мотивированные учащиеся расширяют блок задач задачами, которые могут быть более рационально решены с помощью других методов, и конструируют обобщенный способ их решения. Ученики в процессе обобщения могут самостоятельно составить опорные схемы обобщенных приемов решения каждого вида задач. Такой подход определяет различную степень самостоятельности школьников при их решении и выделении составов действий обобщенных приемов.

Необходимо описать основы конструирования обобщенных способов решения математических задач. Некоторые исследователи (С.К. Кожухов, В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович, Г.П. Мещерякова и др.), рассматривая процесс решения различных видов математических задач, пошли по пути поиска общего метода их решения, допускающего технологизацию обучения. В методической науке описаны различные подходы к определению составов методов решения задач. Так, при определении состава действий векторного, координатного, геометрических преобразований, аналогии и др. методов А.Г. Саранцев [8] рекомендует поступать следующим образом: анализируется деятельность применения метода в различных ситуациях, определяются элементы умений, которыми необходимо овладеть учащимся, чтобы использовать данный метод в конкретных ситуациях, отрабатывается каждое умение с помощью упражнений. А.Г. Мордкович [6] исходя из определения уравнения с параметром описывает процесс решения любого такого уравнения следующим образом: по некоторому целесообразному принципу множество всех значений параметра разбивается на подмножества; решается заданное уравнение на каждом из этих подмножеств; затем предложенный способ поясняется на конкретных примерах. Подходы разных исследователей к этой проблеме во многом противоположны. Нами выбран вариант, более близкий варианту А.Г. Саранцева, как наиболее отвечающий цели исследования. При этом мы придерживаемся точки зрения Н.Ф. Талызиной, отдающей предпочтение такому пути формирования приемов познавательной деятельности, при которых приемы выступают как предметы специального усвоения с целью их сознательного использования в новых условиях. Поэтому первая задача учителя, оказывающего педагогическую поддержку учащимся, состоит в установлении содержания способа, предлагающем выделение составляющих его действий; вторая задача заключается в анализе отношения между составляющими действиями; третья – в составлении общего предписания, обеспечивающего применение общего приема для решения задач соответствующего класса. Чтобы определить составы обобщенных способов решения отдельного вида математических задач, нужно поступить следующим образом: выделить действия по решению конкретных частных задач данного типа; затем на основе анализа определить общие характеристики, охватывающие всевозможные частные проявления; описать состав обобщенного способа [9, 10]. Эти положения и составляют основу конструирования обобщенных способов математической деятельности (в том числе и деятельности по решению математических задач).

Проиллюстрируем особенности конструирования обобщенных способов решения одного из типов задач, требующих нахождения косинусов углов в многогранниках. Рассмотрим пять задач определенного типа и выделим действия по решению конкретных частных задач данного типа.

1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка E – середина ребра $A_1 B_1$. Найдите косинус угла между прямыми AE и BD_1 .

2. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$, все ребра которой равны, точка E – середина ребра $A_1 B_1$. Найдите косинус угла между прямыми AE и BC_1 .

3. В половине октаэдра $PABCD$ точка E – середина ребра PD , а точка M – середина ребра PC . Найдите косинус угла между прямыми AE и DM .

4. В правильном тетраэдре $PABC$ точка E – середина ребра PB , а точка M – середина ребра PC . Найдите косинус угла между прямыми AE и BM .

5. В правильном тетраэдре $DABC$ точки P , N , R – середины ребер AD , AC , BD соответственно, O – центр грани ABC . Найдите косинус угла между прямыми OP и NR .

Анализируя приемы решения рассмотренных задач и выделяя общее содержание действий, охватывающих возможные случаи решения задач подобного типа, опишем состав обобщенного способа решения задач на нахождение косинусов углов в многогранниках между прямыми:

1) выберите способ решения задачи: с помощью введения системы координат (если это возможно) – п. 7-10 или без нее – п. 2-6;

2) обозначьте условно прямые, косинус угла между которыми требуется найти, a и b ;

3) выполните следующие дополнительные построения:

– проведите прямую c , параллельную одной из двух прямых a или b (например a), косинус угла между которыми требуется найти;

– постройте параллелограмм, две противоположные стороны которого образованы прямыми a и c ;

– постройте треугольник, две стороны которого лежат на прямых b и c ;

4) обоснуйте, почему угол между прямыми a и b равен углу между прямыми b и c ;

5) с помощью теорем (теорема Пифагора, теорема косинусов) из соответствующих треугольников найдите все стороны треугольника;

6) с помощью соответствующей формулы найдите косинус угла между прямыми b и c ;

7) введите систему координат так, чтобы координаты вершин многоугольника были заданы наиболее удобным способом;

8) запишите координаты точек, образующих прямые, косинус угла между которыми требуется найти;

9) вычислите координаты векторов, лежащих на указанных прямых;

10) используя скалярное произведение векторов, найдите косинус угла между данными прямыми.

Опишем особенности организации процесса формирования обобщенных способов математической деятельности. По мнению Н.Ф. Талызиной, можно сначала сформировать отдельные действия, составляющие прием, а затем объединить их в единую деятельность. Возможен и другой путь. С самого начала прием формируется как единое целое [10]. В психолого-педагогической литературе установлено, что формирование способов умственной деятельности не одномоментно, это процесс иногда длительный по времени. Исследователи по-разному выделяют в этом процессе отдельные его этапы.

Роль учителя сводится к подбору соответствующих заданий, корректировке формулируемых самими учащимися составов обобщенных приемов решения того или иного вида математических задач, а также к оказанию дифференцированной помощи каждому учащемуся.

Целесообразность формирования обобщенных способов решения математических задач обусловлена повышением требований к качеству усвоения способов решения основных типов математических задач, к умению переносить усвоенные приемы в новые ситуации. Формирование обобщенных способов решения математических задач позволяет достигать развивающих целей обучения; служит одним из

путей обучения способам усвоения опыта самостоятельной творческой деятельности; позволяет усваивать способы решения не формально, а осознанно.

Овладение обобщенными способами математической деятельности учащимися при решении задач способствует их возможности мыслить теоретически, видеть сущность за частными проявлениями и в силу этого самостоятельно продвигаться в математической области знаний, в том числе при продолжении учебы или освоении выбранной профессии, существенным образом связанной с математикой.

Опытно-экспериментальные исследования по проверке эффективности описанной методики проведения занятий при решении математических задач проводились в период 2012–2014 гг. на базе МБОУ ВСШ № 4 г. Нижнего Новгорода. Оценка эффективности осуществлялась на основе сравнения результатов контрольных работ, тестирования, анализа результатов анкетирования в контрольных и экспериментальных классах. Сравнительный анализ исходных показателей качества знаний, обученности, способности к самостоятельному усвоению знаний на констатирующем этапе показал, что между экспериментальной и контрольной группами были небольшие различия. Анализ результатов контрольных и тестовых работ на контрольном этапе выявил, что у значительной части обучающихся экспериментальных классов знания носят неформальный характер, а уровень подготовки по математике выше по сравнению с контрольной группой (в экспериментальной группе: 90 % – обученность после эксперимента, 83,3 % – до эксперимента; качество знаний – 50 % после эксперимента, 41,7 % – до эксперимента; в контрольной группе: 90 % – обученность после эксперимента, 85 % – до эксперимента; качество знаний после эксперимента – 45 %, до эксперимента – 43,3 %). Анализ результатов контрольной группы подтвердил, что при традиционной методике работы с математическими задачами материал усваивается формально и практические занятия не способствуют формированию умений оперировать полученными знаниями.

Сравнение результатов анкетирования на констатирующем и контрольном этапах эксперимента показало, что после экспериментального обучения обучающиеся стали чаще использовать графическую интерпретацию для усвоения теоретического материала, лучше осознавать выполняемые действия и оперировать понятиями, усвоенными на формально-логическом уровне. Было отмечено снижение трудностей в процессе самостоятельной работы с учебным материалом.

Таким образом, проведенный сравнительный анализ анкетирования, обработка результатов контрольных и тестовых работ в контрольной и экспериментальной группах подтвердили эффективность описанной педагогической поддержки, оказываемой обучающимся при решении математических задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванова Л.Г.* Овладение обобщенными образами и использование их учащимися в решении учебных задач // Вопросы психологии. – 1980. – № 2. – С. 118-121.
2. *Столяр А.А.* Логические проблемы преподавания математики: дисс. ... докт. пед. наук / А.А. Столяр. – М., 1968. – 326 с.
3. *Артемов А.К.* Методологические основы методики формирования математических умений школьников: дисс. ... докт. пед. наук / А.К. Артемов. – Пенза, 1984. – 350 с.
4. *Ланда Л.Н.* Алгоритмизация в обучении. – М.: Просвещение, 1966. – 523 с.
5. *Якиманская И.С.* Индивидуально-психологические различия в оперировании пространственными отношениями у школьников // Вопросы психологии. – 1976. – № 3. – С. 70-82.

6. Якиманская И.С. Личностно-ориентированное обучение в современной школе. – М.: Педагогика, 1996. – 96 с.
7. Епишева О.Б. Деятельностный подход как теоретическая основа проектирования методической системы обучения математике: дисс. ... докт. пед. наук / О.Б. Епишева. – М., 1999. – 460 с.
8. Саранцев Г.И. Упражнения в обучении математике. – М.: Просвещение, 2005. – 255 с.
9. Талызина Н.Ф. Формирование познавательной деятельности младших школьников. – М.: Просвещение, 1988. – 175 с.
10. Талызина Н.Ф. Формирование познавательной деятельности учащихся. – М.: Знание, 1983. – 96 с.

Поступила в редакцию 24.12.2014;
в окончательном варианте 24.12.2014

UDC 371.321.5

THE FORMATION OF GENERALIZED WAYS OF MATHEMATICAL ACTIVITY OF STUDENTS IN THE PROCESS OF SOLVING PROBLEMS

S.P. Gavryuchenkova

Nizhny Novgorod State Pedagogical University
1, Ulyanov str., Nizhny Novgorod, 603950
E-mail: gavryuchenko@mail.ru

The change of the purposes, tasks and technologies in education demands changes in the systems of training of students. The purpose of education is to prepare students for the future participation in the activities of the society, while the content of education is the development of general methods of the human activity. A person should be taught how to generalize and analyze the information rather than mechanically memorize it. In the article the author suggests several approaches to solving this question: the author represents a system of activization of the student's cognitive independence in the educational process in the process of solving mathematical problems and the factors that promote the development of thinking of school children in the context of the reform of education. The aspects of the educational support of students are highlighted and revealed. The special role of the teacher in shaping the creative development of the individual is emphasized. It is analyzed what the teacher has to do in connection with this. The methods of teaching of mathematical concepts, stimulating the transition to a higher level of development of a student's readiness for independent are offered. The ways of organizing the activity during the lesson are considered. The article introduces the results of control and test work, as well as questionnaires. The results of the investigation have shown the efficiency of the system of activization of student's cognitive independence in the educational process.

Key words: educational process, educational support, the role of the teacher, mathematical problems, mathematical abilities of students.

Original article submitted 24.12.2014;
revision submitted 24.12.2014

Svetlana P. Gavryuchenkova, assistant, Dept. of mathematics and mathematics education.