

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Выготский Л. С.* Проблемы развития психики. Собр. соч. Т. 3. М.: Педагогика, 1983. 367 с.
2. *Ермолаева Е. П.* Новая профессиональная реальность: потери и обретения // Управление персоналом.. 2002. №4. С. 35-41.
3. *Каганов А. Б.* Рождение специалиста: профессиональное становление студента. М.: БГУ, 1983. 111 с.
4. *Поваренков Ю. П.* Психологическое содержание профессионального становления человека. М.: Изд-во УРАО, 2002. 160 с.
5. *Стефаненко Т. Г.* Этнопсихология: Учеб. для студентов вузов по специальности «Психология». Екатеринбург: Деловая книга; М.: Институт психологии РАН: Академический проект, 2000. 320 с.
6. *Шнейдер Л. Б.* Профессиональная идентичность: теория, эксперимент, тренинг. М. – Воронеж: НПО «МОДЭК», 2004. 600 с.
7. *Шнейдер Л. Б.* Идентичность. Воронеж: НПО «МОДЭК», 2004. – 272 с.

УДК 378.14

Е.Н. Рябинова, Е.И. Хмелевская

ЗАДАЧИ УЧЕБНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ХАРАКТЕРА В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Представлен материал по изучению золотого сечения и рядов Фибоначчи в рамках учебно-исследовательской работы при освоении курса высшей математики. Показаны межпредметные связи, возможности реализации и практического применения аппарата Фибоначчи в разнообразных областях исследования.

Согласно [1-3] при изучении курса высшей математики рассматриваются в основном задачи первых трех уровней – знакомства, воспроизведения и применения. Задачи четвертого уровня, требующие творчества, исследования решаются студентами в рамках учебно-исследовательской работы. Приведем пример творческого подхода к изучению золотого сечения и рядов Фибоначчи.

При изучении явлений в любой области знания – будь то математика или история, физика или медицина, астрономия или экономика – всюду и всегда основным этапом является установление определённых закономерностей, связывающих отдельные элементы изучаемого явления. Часто удаётся открытые закономерности отобразить в определённых формулах, и человек, изучивший язык формул, может сразу увидеть результаты труда, иногда долгого и упорного, который потребовался для открытия этих закономерностей. Но для того чтобы воспитать в себе исследователя, недостаточно понимать только конечные результаты исследования. Необходимо вникнуть в самый процесс исследовательской работы и усвоить тот метод, который был использован, чтобы прийти к удачному результату. «Не то важно знать, что Земля круглая, а то важно знать, как люди дошли до этого», – писал Л.Н. Толстой. Поиски верного метода – это начальный этап изучения любого явления [4].

Рассмотрим числовую последовательность

$$F_1, F_2, \dots, F_n, \dots, \quad (1)$$

в которой каждый член равен сумме двух предыдущих членов, т.е. при всяком $n > 2$ выполняется равенство

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}. \quad (2)$$

Такие последовательности, в которых каждый член определяется как некоторая функция предыдущих, в математике называются рекуррентными, или возвратными, последовательностями. Сам процесс последовательного определения элементов таких последовательностей называется рекуррентным процессом, а равенство (2) – возвратным (рекуррентным) уравнением. Число рекуррентно – индуктивно по его номеру.

Заметим, что по одному условию (2) члены последовательности (1) вычислять нельзя. Можно подобрать сколько угодно различных числовых последовательностей, удовлетворяющих этому условию. Например

$$\begin{aligned} &2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, \dots, \\ &1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \dots, \\ &-1, -5, -6, -11, -17, \dots, \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Значит, для однозначного построения последовательности (1) условия (2) явно недостаточно, и нам следует указать некоторые дополнительные условия. Очевидно, вместе с условием (2) для определения последовательности (1) необходимо знать два ее первых члена.

Обратимся к важному частному случаю последовательности (1), когда $F_1=1$ и $F_2=1$. Условие (2), как было отмечено, дает нам возможность вычислять последовательно один за другим все члены этого ряда. Нетрудно проверить, что в этом случае первыми четырнадцатью его членами будут числа

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots \quad (3)$$

В честь автора этой задачи всю последовательность (3) при $F_1=F_2=1$ называют рядом Фибоначчи, а члены её – числами Фибоначчи.

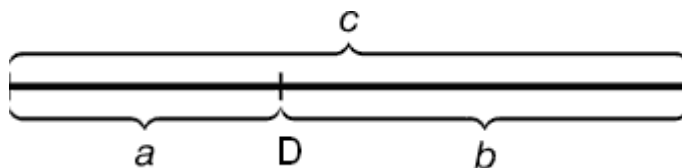
Часто ряд (3) записывается в виде $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$

Особенность указанной последовательности чисел состоит в том, что каждый ее член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих $2 + 3 = 5$; $3 + 5 = 8$; $5 + 8 = 13$; $8 + 13 = 21$; $13 + 21 = 34$ и т.д., а отношение смежных чисел ряда приближается к отношению золотого деления. Так, $21 : 34 = 0,617$, а $34 : 55 = 0,618$. Это отношение обозначается символом Φ . Только это отношение – $0,618 : 0,382$ – дает непрерывное деление отрезка прямой в золотой пропорции, увеличение его или уменьшение до бесконечности, когда меньший отрезок так относится к большему, как больший ко всему.

В математике пропорцией (лат. *proportio*) называют равенство двух отношений: $a : b = c : d$.

Золотое сечение – это такое пропорциональное деление отрезка на неравные части, при котором весь отрезок так относится к большей части, как сама большая часть относится к меньшей; или, другими словами, меньший отрезок так относится к большему, как больший ко всему (рис. 1). Можно сказать, что большая из частей отрезка является средним пропорциональным между меньшей его частью и всем отрезком.

$$a : b = b : c \text{ или } c : b = b : a. \quad (4)$$



Р и с. 1. Геометрическое изображение золотой пропорции

Чтобы найти длину большей части отрезка, примем $c=1$, $b=x$. Тогда $a=1-x$, и пропорция (4) примет вид

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}, \quad (5)$$

откуда

$$\begin{aligned} x^2 &= 1-x; \\ x^2+x-1 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Корнями уравнения (6) являются следующие числа:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,618; \\ x_2 &= \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1,618; \quad |x_2| \approx 1,6. \end{aligned}$$

Положительный корень x_1 соответствует точке D на рис. 1. Деление точкой D называют делением в среднем и крайнем отношении, а также золотым делением (сечением) или золотой (божественной) пропорцией.

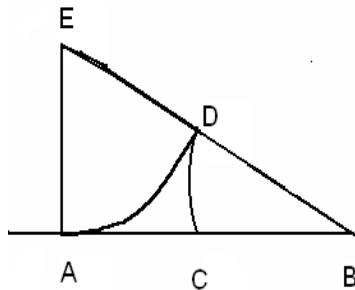
Если взять отрицательный корень уравнения (6), то точка x_2 окажется вне рассматриваемого отрезка (такое деление в геометрии называется внешним делением). Можно показать, что и здесь мы имеем дело с золотым сечением.

Для положительного корня отношение в пропорции (5) величину

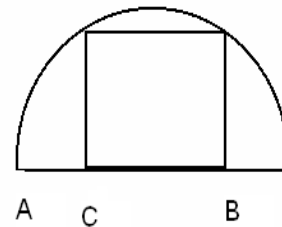
$$\frac{1}{x} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot (1+\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5}) \cdot (1+\sqrt{5})} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{5-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618 \approx 1,6. \quad (7)$$

Получили значение, равное, но противоположное по знаку корню x_2 , что не является случайным.

Фактическое построение точки, делящей отрезок золотым сечением, можно осуществить следующим образом (рис. 2).



Р и с. 2. Построение точки золотого сечения



Р и с. 3. Золотое сечение для квадрата, вписанного в полукруг

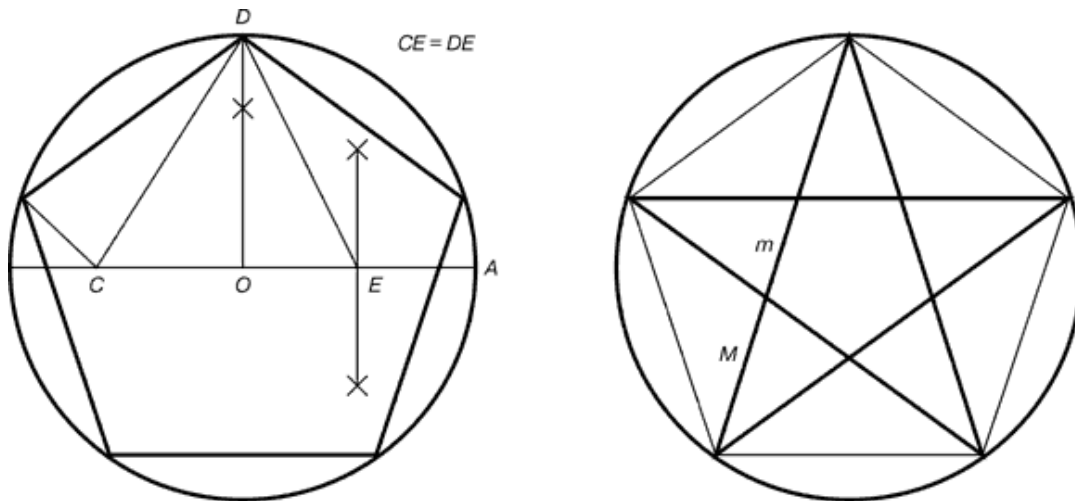
Пусть $AB=1$; восстановим из точки A перпендикуляр и возьмем точку E , для которой $AE=1/2$ (рис. 2). Тогда $EB = \sqrt{1+(1/2)^2} = \sqrt{5}/2$.

Проведя из E как из центра дугу через A до пересечения с EB в точке D , мы получаем

$$BD = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618.$$

Наконец, проведя через D дугу с центром в B , мы находим искомую точку C_1 . Точку внешнего деления C_2 можно найти из условия $AC_2 = BC_1$.

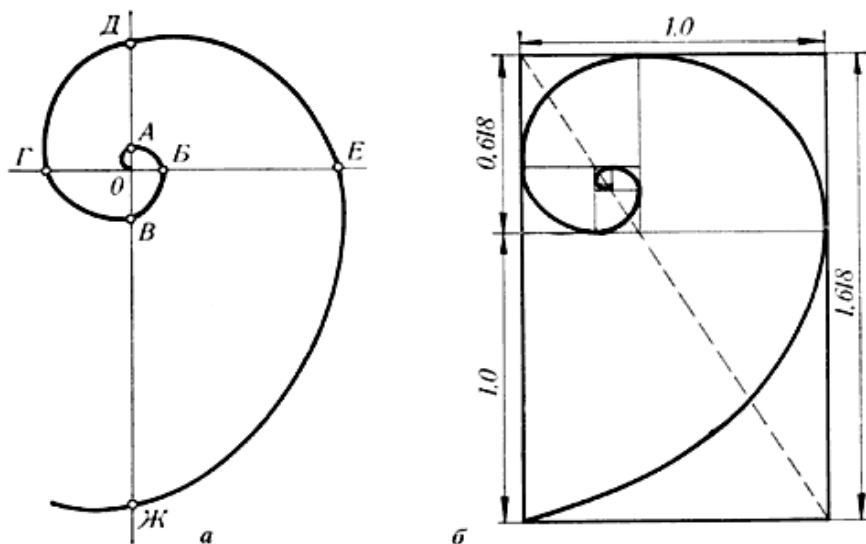
Золотое сечение довольно часто встречается в геометрии, например, для квадрата, вписанного в полукруг (рис. 3), точка C делит золотым сечением отрезок AB .



Р и с. 4. Построение пентаграммы

Для построения пентаграммы необходимо построить правильный пятиугольник. Пусть O – центр окружности, A – точка на окружности и E – середина отрезка OA . Перпендикуляр к радиусу OA , восстановленный в точке O , пересекается с окружностью в точке D . Отложим на диаметре отрезок $CE=ED$. Длина стороны вписанного в окружность правильного пятиугольника равна DC . Откладываем на окружности отрезки DC и получим пять точек для изображения правильного пятиугольника. Соединяем углы пятиугольника через один диагоналями и получаем пентаграмму. Все диагонали пятиугольника делят друг друга на отрезки, связанные между собой золотой пропорцией.

Золотая пропорция просматривается и в других геометрических фигурах. В частности, золотой прямоугольник – прямоугольник, у которого отношение большей стороны к меньшей составляет 1,6. Он обладает многими необычными свойствами. Отрезав от «золотого прямоугольника» квадрат, сторона которого равна меньшей стороне прямоугольника, мы снова получим «золотой прямоугольник» меньших размеров. Продолжая отрезать квадраты, мы будем получать все меньшие и меньшие «золотые прямоугольники». Последовательно отсекая от золотых прямоугольников квадраты до бесконечности, каждый раз соединяя противоположные точки четвертью окружности, мы получим золотую спираль. Архимед вывел уравнение спирали, увеличение ее шага всегда равномерно (рис. 5). В настоящее время спираль Архимеда широко применяется в технике [5].



Р и с. 5. Построение спирали

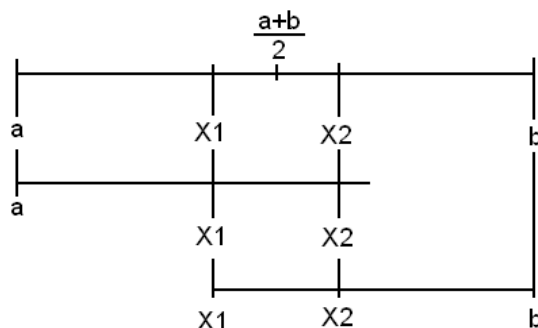
Методы золотого сечения и Фибоначчи можно применять при решении задач безусловной оптимизации [6]: требуется решить задачу отыскания локальных экстремумов функции $y = f(x)$, если множество x совпадает со всей числовой прямой, т.е. $x = R$.

Применение численных методов при отыскании точек x^* локального минимума функции $f(x)$ предполагает:

определение промежутков унимодальности функции, т.е. нахождение отрезков, которым принадлежит одна точка локального минимума;

вычисление x^* , принадлежащего выбранному промежутку, с заданной точностью.

С помощью рис. 6 можно понять алгоритм метода золотого сечения при нахождении последовательности вложенных отрезков $[a_i, b_i]$ ($i = 0, 1, \dots, n$).



Р и с.6. Геометрическое изображение алгоритма метода золотого сечения

Точка x_1 является золотым сечением отрезка $[a, b]$, если отношение длины $b-a$ всего отрезка к длине $b-x_1$ большей части равно отношению длины большей части к длине x_1-a меньшей

части, т.е. x_1 – золотое сечение, если справедливо отношение $\frac{b-a}{b-x_1} = \frac{b-x_1}{x_1-a}$. Аналогично, точ-

ка x_2 , симметричная точке x_1 относительно середины отрезка $[a, b]$, является вторым золотым сечением этого отрезка. Так как точки x_1 и x_2 расположены симметрично относительно середины отрезка $[a, b]$, то можно записать формулы для координат двух золотых сечений так:

$$x_{1,2} = \frac{a+b}{2} \pm \kappa \frac{b-a}{2}.$$

Учитывая, что $b-x_1 = b - \frac{a+b}{2} + \kappa \frac{b-a}{2} = \frac{b-a}{2} + \kappa \frac{b-a}{2}$, $x_1 - a = \frac{b-a}{2} - \kappa \frac{b-a}{2}$, и используя определение золотого сечения, вычислим число $\kappa > 0$:

$$\frac{b-a}{b-x_1} = \frac{b-x_1}{x_1-a} \Rightarrow \frac{2}{1+\kappa} = \frac{1+\kappa}{1-\kappa} \Rightarrow \kappa^2 + 4\kappa - 1 = 0 \Rightarrow \kappa = \sqrt{5} - 2.$$

Теперь разберем подробнее алгоритм метода золотого сечения при нахождении последовательности вложенных отрезков $[a_i, b_i]$ ($i=0, 1, \dots, n$), сужающихся к точке x^* локального минимума унимодальной функции $f(x)$.

Сначала на исходном отрезке $[a, b]$ при $\kappa = \sqrt{5} - 2$ найдем точки x_1 и x_2 , а затем разность $\Delta_1 x = x_2 - x_1$. Далее вычисляем значения функции $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ и образуем суженный отрезок $[a_1, b_1]$. Используя свойство золотого сечения на отрезке $[a_1, b_1]$ находим два золотых сечения $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$. При этом возможны три случая:

I. $y_1 < y_2$, $a_1 = a$, $b_1 = x_2$, $x_2^{(1)} = x_1$, $x_1^{(1)} = a_1 + \Delta_1 x$, $y_2^{(1)} = y_1$;

II. $y_1 > y_2$, $a_1 = x_1$, $b_1 = b$, $x_1^{(1)} = x_2$, $x_2^{(1)} = b_1 - \Delta_1 x$, $y_1^{(1)} = y_2$;

III. $y_1 = y_2$, $a_1 = x_1$, $b_1 = x_2$, $x_{1,2}^{(1)} = \frac{a+b}{2} \pm \kappa \frac{b-a}{2}$.

Теперь, следуя изложенной схеме, можно переходить к нахождению отрезков $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$ и т.д., учитывая при этом, что в случаях I или II значение соответственно $y_2^{(i)}$ или $y_1^{(i)}$ целевой функции уже получено на предыдущем шаге ($i=1, 2, \dots, n$).

Как видно, в этом методе на каждой итерации расчета (кроме первой) требуется лишь одно новое значение функции.

Точность приближенного равенства $x^* \approx a_n \approx b_n$ на n -ном шаге вычислений можно оценить неравенством

$$0 \leq x^* - a_n \leq \frac{\kappa^n}{2} (b-a) = \frac{b-a}{2} \tau^n < \varepsilon, \text{ где } \tau = \frac{2}{\kappa+1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \approx 1,618.$$

Найдем точку x^* локального минимума функции $f(x) = 2x^2 - \ln x$ на отрезке $[0,25; 1]$ методом золотого сечения с точностью $\varepsilon = 0,1$.

Определим сначала минимальное число шагов n :

$$\frac{b-a}{\tau^n} < \varepsilon; n > \frac{\ln \frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln \tau} = \frac{\ln \frac{0,75}{0,1}}{\ln 1,618} \approx 4,187, n_{\min} = 5.$$

Произведем последовательные вычисления.

Шаг 1: отрезок $[a, b] = [0,25, 1]$;

$x_1 \approx 0,5365$, $x_2 \approx 0,7135$, $y_1 \approx 1,1983 < y_2 \approx 1,3558$, $\Delta x_1 \approx 0,177$.

Шаг 2: отрезок $[a_1, b_1] = [a, x_1] \approx [0,25, 0,7135]$;

$x_1^{(1)} \approx 0,4271$, $x_2^{(1)} = x_1$, $y_1^{(1)} \approx 1,2156 > y_2^{(1)} = y_1$, $\Delta x_2 \approx 0,1094$.

Шаг 3: отрезок $[a_2, b_2] = [x_1^{(1)}, x_2] \approx [0,4271, 0,7135]$;

$x_1^{(2)} = x_2^{(1)} = x_1$, $x_2^{(2)} \approx 0,6041$, $y_1^{(2)} = y_1 < y_2^{(2)} \approx 1,2339$, $\Delta x_3 \approx 0,06763$.

Шаг 4: отрезок $[a_3, b_3] = [x_1^{(1)}, x_2^{(2)}] \approx [0,4271, 0,6041]$;

$x_1^{(3)} \approx 0,4947$, $x_2^{(3)} = x_1^{(2)} = x_2^{(1)} = x_1$, $y_1^{(3)} \approx 1,1933 < y_2^{(3)} = y_1$, $\Delta x_4 \approx 0,0418$.

Шаг 5: отрезок $[a_4, b_4] = [x_1^{(1)}, x_2^{(3)}] \approx [0,4271, 0,5365]$;

$x_1^{(4)} \approx 0,4688$, $x_2^{(4)} \approx x_1^{(3)}$, $y_1^{(4)} \approx 1,1971 > y_2^{(4)} = y_1^{(3)}$, $\Delta x_5 \approx 0,0258$.

Отрезок $[a_5, b_5] = [x_1^{(4)}, x_2^{(3)}] \approx [0,4688, 0,5365]$.

Очевидно точкой минимума функции $f(x)$ с погрешностью

$\Delta = b_5 - a_5 \approx 0,0677 < 0,1 = \varepsilon$ является $x^* \approx a_5 \approx 0,4688$.

Метод Фибоначчи использует числа F_n , задаваемые следующими рекуррентными соотношениями:

$$F_0 = 1, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

Для сравнения методов Фибоначчи и золотого сечения отметим два предела отношений чисел Фибоначчи:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \approx 1.618, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}-1} \right)^2 = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}-1} \approx 2.618.$$

Формулы для двух координат x_1 и x_2 золотого сечения некоторого отрезка $[a, b]$ можно переписать в виде

$$x_1^i = a + \frac{b-a}{1+\tau}, \quad x_2^i = a + \frac{b-a}{\tau}, \quad \text{где } \tau = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \approx 1.618 \quad (i=0, 1, \dots).$$

Алгоритм метода Фибоначчи при нахождении последовательности вложенных отрезков $[a_i, b_i]$ ($i=0, 1, \dots$), сужающихся к точке x^* локального минимума унимодальной функции $f(x)$, состоит в следующем.

На некотором шаге i вычисляются два значения

$$x_1^i = a_i + \frac{b_i - a_i}{\tau_{1i}}, \quad x_2^i = a_i + \frac{b_i - a_i}{\tau_{2i}}, \quad \text{где } \tau_{1i} = \frac{F_{i+3}}{F_{i+1}}, \quad \tau_{2i} = \frac{F_{i+2}}{F_{i+1}}.$$

Заметим, что, начиная с некоторого номера i формулы дают практически совпадающие значения для золотых сечений отрезка $[a_i, b_i]$, так как

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_{1i} = 1 + \tau \approx 2.618 \quad \text{и} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \tau_{2i} = \tau \approx 1.618.$$

Далее новый отрезок локализации определяется по следующему правилу:

если $f(x_1) \leq f(x_2)$, то $[a_{i+1}, b_{i+1}] = [a_i, x_2]$;

если $f(x_1) \geq f(x_2)$, то $[a_{i+1}, b_{i+1}] = [x_1, b_i]$.

Точность приближенного равенства $x^* \approx a_n \approx b_n$ на n -ом шаге вычислений можно оценить

$$\text{неравенством } 0 \leq x^* - a_n \leq \frac{b - a}{\tau^n} < \varepsilon.$$

Найдем точку x^* локального минимума рассмотренной выше функции $f(x) = 2x^2 - \ln x$ с точностью $\varepsilon = 0.1$ на отрезке $[0.25; 1]$, применяя метод Фибоначчи и сохраняя минимальное число шагов $n_{\min} = 5$.

Произведем последовательные вычисления для локализации точки минимума функции на отрезке $[0.25; 1]$.

Шаг 1, $i = 0$: отрезок $[a_0, b_0] = [a, b] = [0.25, 1]$;

$$x_1^{(0)} = a + \frac{b-a}{\tau_{10}}, \quad x_2^{(0)} = a + \frac{b-a}{\tau_{20}}, \quad \tau_{10} = \frac{F_3}{F_1}, \quad \tau_{20} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Здесь $F_1=1, F_2=2, F_3=3, \tau_{10}=3, \tau_{20}=2, x_1=0.5, x_2=0.625$.

Далее $f(x_1^{(0)}) = f(0.5) \approx 1.193147 < f(x_2^{(0)}) = f(0.625) \approx 1.251254$.

Новый отрезок локализации $[a_1, b_1] = [a_0, x_2^{(0)}] = [0.25; 0.625]$.

Шаг 2, $i=1$: отрезок $[a_1, b_1] = [0.25; 0.625]$.

Здесь $F_4=5, \tau_{11} = \frac{F_4}{F_2} = 2.5, \tau_{22} = \frac{F_3}{F_2} = 1.5$;

$$x_1^1 = a + \frac{b-a}{\tau_{11}} = 0.25 + \frac{0.375}{2.5} = 0.4;$$

$$x_2^1 = a + \frac{b-a}{\tau_{21}} = 0.25 + \frac{0.375}{1.5} = 0.5.$$

Далее $f(x_1^{(1)}) = f(0.4) \approx 1.236291 > f(x_1^{(0)}) = f(0.5) = 1.193147$.

Новый отрезок локализации $[a_2, b_2] = [x_1^{(1)}, b_1] = [0.4; 0.625]$.

Шаг 3, $i=2$: отрезок $[a_2, b_2] = [0.4; 0.625]$.

Здесь $F_5=8, \tau_{12} = \frac{F_5}{F_3} \approx 2.666667, \tau_{22} = \frac{F_4}{F_3} \approx 1.666667$;

$$x_1^2 = a_2 + \frac{b_2 - a_2}{\tau_2} \approx 0,4 + \frac{0,225}{2,666666} \approx 0,484375;$$

$$x_2^2 = a_2 + \frac{b_2 - a_2}{\tau_2} = 0,4 + \frac{0,225}{1,666666} \approx 0,535.$$

Далее $f(x_1^{(2)}) = f(0,484375) \approx 1,1941347 < f(x_2^{(2)}) = f(0,535) \approx 1,197939$.

Новый отрезок локализации $[a_3, b_3] = [a_2, x_2] = [0,4; 0,535]$.

Шаг 4, $i=3$: отрезок $[a_3, b_3] = [0,4; 0,535]$.

Здесь $F_6=13$, $\tau_{13} = \frac{F_6}{F_4} = 2,6$, $\tau_{23} = \frac{F_5}{F_4} = 1,6$;

$$x_1^3 = a_3 + \frac{b_3 - a_3}{\tau_3} = 0,4 + \frac{0,135}{2,6} \approx 0,451923;$$

$$x_2^3 = a_3 + \frac{b_3 - a_3}{\tau_3} = 0,4 + \frac{0,135}{1,6} \approx 0,484375.$$

Далее $f(x_1^{(3)}) \approx f(0,451923) \approx 1,202712 > f(x_2^{(3)}) \approx f(0,484375) \approx 1,194134$.

Новый отрезок локализации $[a_4, b_4] = [x_1, b_3] = [0,451923; 0,535]$.

Точкой минимума функции $f(x)$ с погрешностью

$b_4 - a_4 = 0,535 - 0,452 = 0,083 < \varepsilon = 0,1$ является $x^* \approx a_4 \approx 0,452$.

В заключение отметим, что закономерности золотой симметрии проявляются в энергетических переходах элементарных частиц, в строении некоторых химических соединений, в планетарных и космических системах, в генных структурах живых организмов. Спиралью закручивается ураган. Молекула ДНК закручена двойной спиралью. Эти закономерности есть в строении отдельных органов человека и тела в целом, а также проявляются в биоритмах и функционировании головного мозга и зрительном восприятии [7].

Все чаще в последнее время золотая пропорция используется для решения социологических задач. В качестве аналога общепринятой меры золотого деления используют эквиваленты в процентах – 63% и 37% [8].

Вращая прямую с обозначенной точкой золотого сечения вокруг середины отрезка, получим два круга, проведенных из одного центра. Причем диаметр малого круга будет составлять 26% от длины диаметра большого круга. Вращением полученного круга вокруг собственного диаметра можно получить шар с таким же соотношением диаметров. Такое представление расширяет применение аппарата Фибоначчи на двумерное и трехмерное пространство, что позволяет решать более сложные социально-экономические задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

8. *Рябинова Е.Н.* Представление психолого-познавательных и деятельностных составляющих учебного процесса // Проектирование, контроль и управление качеством продукции и образовательных услуг: Матер. X Всероссийской конференции-семинара 1, 2 ноября 2007 г. Москва-Тольятти-Сызрань: Изд-во Самар. гос. техн. ун-та, 2007. С. 318-321.
9. *Рябинова Е.Н., Титов Б.А.* Построение познавательно-деятельностной матрицы учебного процесса // Вестник СГАУ. Самара: Изд-во ИПУ СГАУ, 2004. №1(5). С. 153-158.
10. *Самарин Ю.П., Рябинова Е.Н.* Активные методы изучения математики в вузе: Учеб. пособ. Куйбышев: Куйбышев. гос. ун-т, 1987. 87 с.
11. *Гарднер М.* Математические головоломки и развлечения. М.: Мир, 1971. 87 с.
12. *Стахов А.П.* Коды золотой пропорции. М.: Радио и связь, 1984. 151 с.
13. *Ракитин В.И.* Руководство по методам вычислений и приложения МATHCAD. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 264 с.
14. *Лидоу Д.* Геометрия и искусство. М.: Мир, 1989. 297 с.
15. *Мурсалимов Р.В., Петрова Н.Н., Бессонов Е.Б.* Общественное мнение и созидание по законам красоты (опыт исследования). Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1991. 65 с.