

УДК 629.3

EDN: YEMREG

**ИЗМЕНЕНИЕ ПРОФИЛЯ ПОВЕРХНОСТИ ДВИЖЕНИЯ
ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА, ОБУСЛОВЛЕННОЕ
СНЕЖНЫМ ПОКРОВОМ, ВЫВЕТРИВАНИЕМ, ТАЯНИЕМ,
ДЕФОРМАЦИЕЙ ОПОРНОГО ОСНОВАНИЯ, СГЛАЖИВАЮЩЕЙ
СПОСОБНОСТЬЮ КОЛЕСА И ПРОЧИМИ ПРОЦЕССАМИ**

П.Е. Дмитриев

ORCID: 0009-0007-6344-963X e-mail: pavel-9524755555@yandex.ru

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
Нижний Новгород, Россия

А.А. Аникин

ORCID: 0000-0003-0368-4199 e-mail: anikin.zvm@mail.ru

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
Нижний Новгород, Россия

Ю.И. Молев

ORCID: 0000-0002-0429-4590 e-mail: moleff@yandex.ru

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
Нижний Новгород, Россия

У.Ш. Вахидов

ORCID: 0000-0003-4109-8406 e-mail: umar-vahidov@mail.ru

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
Нижний Новгород, Россия

С.А. Коростелев

ORCID: 0009-0003-1382-5589 e-mail: korsan73@mail.ru

Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова
Барнаул, Россия

Исследованы возможности моделирования процессов взаимодействия движителя с опорным основанием. Нелинейное уравнение в частных производных первого порядка применено к исследованию изменения профиля поверхности движения, которое может быть вызвано различными причинами. Приведенная модель позволяет описать траекторию центра колеса, движущегося по неровному профилю дороги при длинах неровностей, сопоставимых с радиусом колеса. Рассмотрены примеры качения колеса по неровному профилю опорного основания; рост поверхности за счет падающего снега при отсутствии и наличии ветра; таяние (спадание) профиля. Приведен качественный анализ полученных решений нелинейного уравнения в частных производных, и показаны дальнейшие направления развития теории. Указаны основные проблемы, которые могут возникнуть с «градиентной катастрофой» и областью многозначного решения. Показаны некоторые пути преодоления этих трудностей, а также способы физической интерпретации неоднозначных решений уравнения в частных производных. Показано, что нелинейное уравнение в частных производных позволяет описать широкий круг физических явлений. Данное уравнение может быть включено в более общую модель транспортного средства, например, при рассмотрении движения колебательной системы по неровному профилю.

Ключевые слова: неровный профиль дороги; заснеженный профиль дороги; наземный транспорт.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Дмитриев, П.Е. Изменение профиля поверхности движения транспортного средства, обусловленное снежным покровом, выветриванием, таянием, деформацией опорного основания, сглаживающей способностью колеса и прочими процессами / П.Е. Дмитриев, А.А. Аникин, Ю.И. Молев, У.Ш. Вахидов, С.А. Коростелев // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2024. № 4. С. 71-81. EDN: YEMREG

CHANGES IN VEHICLE'S MOVEMENT SURFACE PROFILE DUE TO SNOW COVER, WEATHERING, MELTING, DEFORMATION OF THE SUPPORTING BASE, WHEEL SMOOTHING ABILITY AND OTHER PROCESSES

P.E. Dmitriev

ORCID: **0009-0007-6344-963X** e-mail: **pavel-9524755555@yandex.ru**

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev

Nizhny Novgorod, Russia

A.A. Anikin

ORCID: **0000-0003-0368-4199** e-mail: **anikin.zvm@mail.ru**

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev

Nizhny Novgorod, Russia

Y.I. Molev

ORCID: **0000-0002-0429-4590** e-mail: **moleff@yandex.ru**

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev

Nizhny Novgorod, Russia

U.Sh. Vakhidov

ORCID: **0000-0003-4109-8406** e-mail: **umar-vahidov@mail.ru**

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev

Nizhny Novgorod, Russia

S.A. Korostelev

ORCID: **0009-0003-1382-5589** e-mail: **korsan73@mail.ru**

Altai State Technical University n.a. I.I. Polzunov

Barnaul, Russia

Abstract. The article explores the possibilities of modeling the processes of interaction between a propulsion unit and a supporting base. A first order nonlinear partial differential equation is used to study the change in the profile of the movement surface, which can be caused by various reasons. The given model allows to describe the trajectory of the center of a wheel moving along an uneven road profile with the lengths of the unevenness comparable to the radius of the wheel. Examples of wheel rolling on an uneven profile of a supporting base; surface growth due to falling snow without wind and with wind; profile melting. A qualitative analysis of the obtained solutions of a nonlinear partial differential equation is given, and further directions for the development of the theory are shown. The main problems that can arise with the «gradient catastrophe» and the multi-valued solution domain are indicated. Some ways of overcoming these difficulties are shown, as well as methods of physical interpretation of ambiguous solutions of partial differential equations. A nonlinear partial differential equation can be used to describe a wide range of physical phenomena. This equation can be included in a more general model of a vehicle, for example, when considering the motion of an oscillating system along an uneven profile.

Key words: uneven road profile; snowy road profile; ground transportation.

FOR CITATION: P.E. Dmitriev, A.A. Anikin, Y.I. Molev, U.Sh. Vakhidov, S.A. Korostelev. Changes in vehicle's movement surface profile due to snow cover, weathering, melting, deformation of the supporting base, wheel smoothing ability and other processes. Transactions of NNSTU n.a. R.E. Alekseev. 2024. № 4. Pp. 71-81. EDN: YEMREG

Проблема описания поверхностей движения остается одной из важных задач наземных транспортных средств, что обусловлено большим разнообразием их физико-механических свойств, сложным характером взаимодействия движителя с неровной деформируемой поверхностью. Изучение поверхностей движения проводятся в разных аспектах: с точки зрения не-

сущей способности; сцепных качеств; микро и макропрофиля, и др. В отличие от предшествующих исследований, в данной работе внимание уделено математическим моделям поверхностей движения, определяющим аналитические зависимости тех или иных характеристик полотна пути и позволяющим в явном виде оценить их взаимосвязь.

В статье показано приложение аналитических методов, подробно изложенных в [1-3], к исследованию изменения профиля поверхности движения, которое может быть вызвано различными причинами: ростом снежного покрова, деформацией под нагрузкой, износом, выветриванием и др. Кроме того, приведенная модель позволяет описывать траекторию центра колеса, движущегося по неровному профилю дороги при длинах неровностей, сопоставимых с радиусом колеса. Последняя задача является наименее разработанной ввиду сложности ее формализации и описания: при движении колеса по неровному профилю возникают положения, когда колесо имеет двухточечный контакт (перекатывается через яму), что приводит к потере гладкости решений. Наиболее близкими исследованиями в рамках данного аспекта изучения поверхности движения являются работы Барахтанова Л.В., Аникина А.А. [4], Кулешова А.П., Молева Ю.И., Жилейкина М.М. [5]. В работах Барахтанова Л.В. и Аникина А.А. применяется вероятностный подход к изучению заснеженных поверхностей движения; в работе Жилейкина М.М. используется кусочно-линейная аппроксимация поверхности движения. Предлагаемая в настоящей работе математическая модель носит более общий характер по сравнению с перечисленными исследованиями, а также позволяет учитывать такие эффекты, как скорость роста поверхности, неравномерность роста поверхности (в зависимости от направления нормали); изменение профиля в ветреную погоду со снегом, когда наблюдается продольное движение профиля и т.п.

Будем считать, что в начальный момент t_0 ординаты профиля дороги описываются (начальной) функцией:

$$z = z(x, t_0) = z_0.$$

С течением времени t происходит эволюция профиля дороги, причины которого на данном этапе не требуют конкретизации (рост снежного покрова; деформация основания; сглаживающая способность шины и пр.). Предполагается только, что изменение профиля дороги происходит перпендикулярно начальному профилю со скоростью w . Причем скорость w может быть как положительная, так и отрицательная – в зависимости от физической постановки задачи (рост поверхности или ее спад). Рассмотрим произвольную точку (г. Р) на начальной поверхности с координатами $\{x_p, z_p\}$, ее эволюция будет происходить по траектории, перпендикулярной – в каждый момент времени t – к текущему профилю дороги $z = z(x, t)$ (рис. 1).

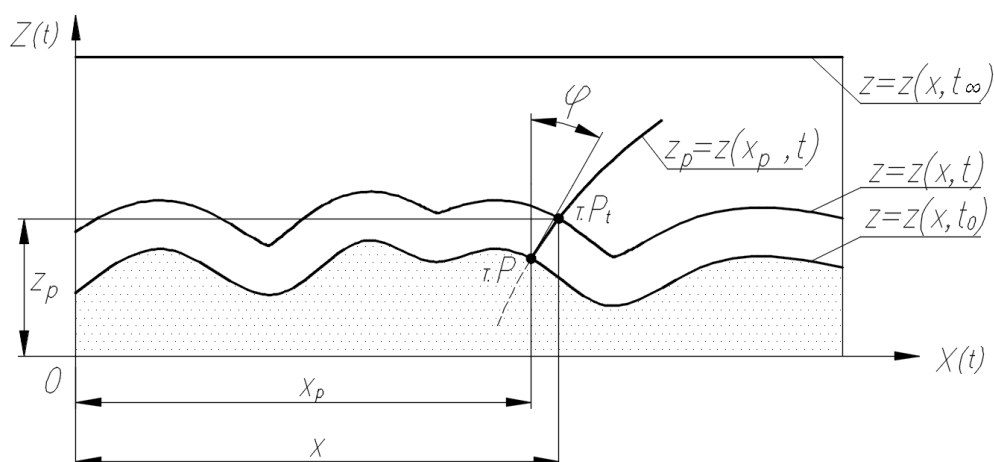


Рис. 1. Кинематика роста профиля поверхности

Fig. 1. Kinematics of surface profile growth

Будем обозначать траекторию эволюции точки Р функцией вида:

$$z_p = \xi(x_p, t). \quad (1)$$

Назовем траекторию точки «ростком» (рис. 2). Координаты точки, принадлежащей «ростку», должны удовлетворять уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_p}{dt} &= w \cdot \sin \varphi \\ \frac{dz_p}{dt} &= w \cdot \cos \varphi \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

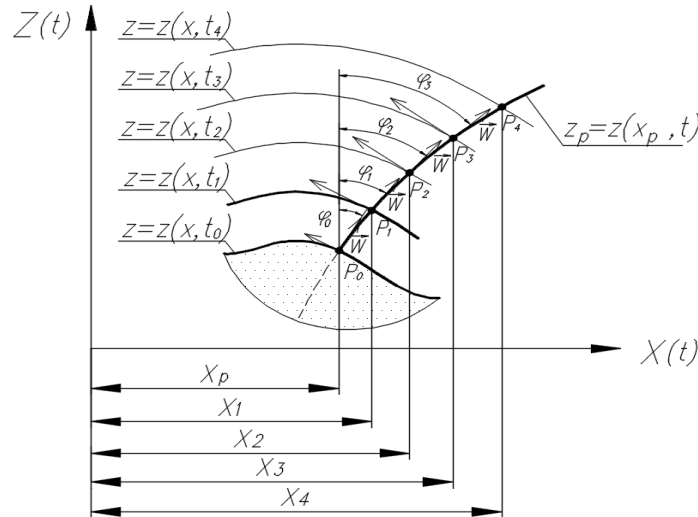


Рис. 2. «Росток» в точке Р

Fig. 2. «Sprout» at point P

При рассмотрении эволюции координат точки Р $\{x_p(t), z_p(t)\}$ должно выполняться также условие:

$$z_p(t) = z(x_p(t), t) = \xi(x_p, t). \quad (3)$$

Тогда второе уравнение системы примет вид:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx_p}{dt} = w \cdot \cos \varphi \quad (4)$$

Подставляя в последнее уравнение (4) первое уравнение системы (2), получим:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} w \cdot \sin \varphi = w \cdot \cos \varphi. \quad (5)$$

Учтем еще две зависимости из элементарной тригонометрии, которые позволят последнее уравнение выразить от одной неизвестной переменной (замкнуть):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\operatorname{tg} \varphi; \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+(\operatorname{tg} \varphi)^2}}. \quad (6)$$

Таким образом, получаем уравнение в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} - \operatorname{tg} \varphi \cdot w \cdot \sin \varphi &= w \cdot \cos \varphi; \\ \cos \varphi \frac{\partial z}{\partial t} &= w(\sin \varphi)^2 + w(\cos \varphi)^2 = w; \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{w}{\cos \varphi}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = w \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}. \quad (8)$$

Рассмотрим ограничение уравнения (8) на вид начального профиля опорной поверхности, т.е. будем считать, что углы φ являются малыми. В этом случае справедливы приближенные равенства:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\operatorname{tg} \varphi \approx -\varphi;$$

$$\sqrt{1 + (\operatorname{tg} \varphi)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \dots$$

Тогда уравнение (8) приведет к виду:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = w + \frac{w}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2. \quad (9)$$

Из уравнения видно, что одно из решений, которому это уравнение удовлетворяет, является решение вида:

$$z(x, t) = wt \quad (10)$$

Уравнение (10) описывает рост поверхности движения как поступательное движение неизменяемого профиля (трансляцию). Если абсолютное положение поверхности движения не представляет интереса в рамках конкретной задачи, а исследуется лишь деформация ее профиля, можно перейти к другой переменной:

$$z'(x, t) = z(x, t) - wt.$$

Тогда уравнение (10) примет вид:

$$\frac{\partial z'}{\partial t} = \frac{w}{2} \left(\frac{\partial z'}{\partial x} \right)^2.$$

Вернемся к общему уравнению (8) и обобщим его на случай анизотропного роста, т.е. учтем зависимость скорости роста w от направления нормали. Введем новую функцию $u(x, t) = \frac{\partial z}{\partial x}$, смысл которой – тангенс угла наклона ростка. Тогда уравнение (8) представится в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= w(u) \sqrt{1 + u(x, t)^2}, \text{ или} \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \Phi(u). \end{aligned} \quad (11)$$

Продифференцируем (11) по x , получим уравнение для поля наклонов $u(x, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (12)$$

где $C(u) = \frac{d\Phi(u)}{du} = \frac{d}{du} (w(u) \sqrt{1 + u^2})$.

Последнее уравнение (12) является уравнением Римана или уравнением простой волны, решения которого методом характеристик приводятся в [2, 3].

Пример 1. Рассмотрим случай, когда поверхность растет с разной скоростью в различных направлениях. Анизотропию роста учтем, полагая скорость w зависящей от u .

Пусть в безветренную зимнюю погоду снег вертикально осаждается на поверхность движения. При этом на элемент поверхности площадью ds , находящейся под углом φ к зениту, за единицу времени выпадает количество снега, пропорциональное $ds \cos \varphi$. Соответствующая скорость роста снежной поверхности в направлении φ определяется равенством:

$$w(u) = w \cos \varphi = \frac{w}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

Подставив полученное выражение в уравнение (9), получим:

$$\Phi(u) = w(u) \sqrt{1 + u^2} = w;$$

откуда следует, что уравнение роста (9) имеет тривиальное решение:

$$z(x, t) = z_0 + wt,$$

согласно которому форма заснеженной поверхности движения меняться не будет.

Пример 2. Рассмотрим более общий случай, когда на поверхность движения осаждаются частицы снега, падающие с разных направлений. Пусть функция $D(\varphi)$ – диаграмма направленности, задающая интенсивность потока падающих частиц снега под углом φ к вертикальной оси z . Тогда полная интенсивность частиц, падающих на площадку поверхности, наклоненную под углом φ к оси z определяется выражением

$$w(\varphi) = \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} D(\tau) \cos(\varphi - \tau) d\tau. \quad (13)$$

Первый пример, соответствующий вертикально падающему снегу, является частным случаем (13) с сингулярной диаграммой направленности:

$$D(\varphi) = w\delta(\varphi).$$

Пределы интегрирования в (13) учитывают эффекты затенения рассматриваемого элемента профиля опорной поверхности $z = z(x, t)$ остальной ее частью, т.е. являются ее функциями:

$$\varphi_+ = \varphi_+(z), \varphi_- = \varphi_-(z).$$

Иллюстрация, поясняющая зависимость пределов интегрирования от вида опорной поверхности в окрестности рассматриваемой точки, показана на рис. 3.

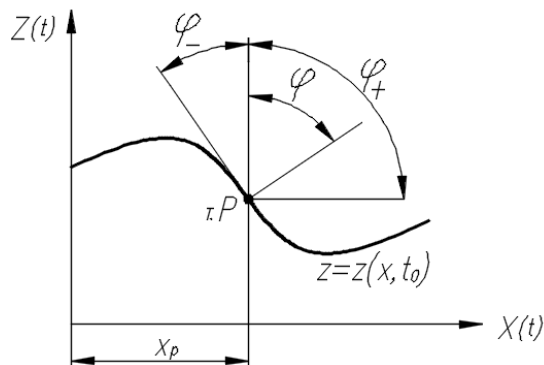


Рис. 3. Зависимость пределов интегрирования диаграммы направленности осаждаемых частиц снега на опорную поверхность

Fig. 3. Dependence of the integration limits of the directional diagram of snow particles deposited on the supporting surface

На рис. 3 для определенности показана область рассматриваемой точки профиля поверхности, с углом нормали к вертикальной линии $\varphi > 0$. При этом пределы интегрирования определяются из условия возможности попадания частиц снега на поверхность: слева – угол падения ограничен касательной к поверхности; справа – горизонтальной прямой, проходящей через рассматриваемую точку.

В рамках данного примера рассмотрим изотропный поток $D(\varphi) = const$ и отсутствие затенения ($\varphi_+ = \pi/2$, $\varphi_- = \varphi - \pi/2$):

$$w(\varphi) = \int_{\varphi - \pi/2}^{\pi/2} D \cos(\varphi - \tau) d\tau = D(1 + \cos \varphi).$$

Пример 3. Рассмотрим случай, когда снегопад сопровождается ветром, а снег падает под углом $\varphi_0 \neq 0$ к зениту. Начальный профиль дороги $z = z(x, t_0) = z_0$ имеет ограниченные углы наклона нормалей:

$$|\varphi - \varphi_0| < \frac{\pi}{2}.$$

Определим эволюцию профиля заснеженной поверхности движения. В этом случае диаграмма направленности имеет вид:

$$D(\tau) = w\delta(\tau - \varphi_0).$$

Ограничение на углы нормалей гарантирует, что для любой точки исходного профиля $z(x, t_0)$ δ -функция не выйдет за пределы интегрирования. Следовательно, скорость прилипания снега на участок поверхности дороги, нормаль к которому составляет угол φ с вертикалью, определяется выражением:

$$w = w \cos(\varphi - \varphi_0) = w(\cos \varphi \cos \varphi_0 + \sin \varphi \sin \varphi_0).$$

Подставив это выражение в (13), перейдя от φ к u и введя обозначения $w_1 = \cos \varphi_0$; $w_2 = \sin \varphi_0$, запишем уравнение в терминах $z(x, t)$:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = w_1 + w_2 u \text{ или}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} - w_1 \frac{\partial z}{\partial x} = w_2, z(x, t_0) = z_0.$$

Последнее уравнение является линейным и имеет решение в виде:

$$z(x, t) = z_0(x - w_2 t) + w_1 t.$$

Вид решения показывает, что профиль заснеженного основания не меняет формы, а смещается в сторону ветра (рис. 4).

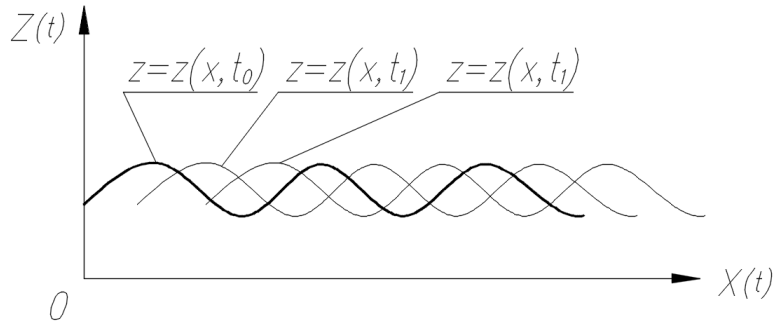


Рис. 4. Продольное смещение профиля опорной поверхности при снегопаде, сопровождающемся ветром

Fig. 4. Longitudinal displacement of the supporting surface profile during snowfall accompanied by wind

Пример 4. Рассмотрим случай роста с изотропной скоростью, т.е. скоростью не зависящей от угла φ наклона нормали $w(u) = w = const$. В этом случае $C(u) = \frac{wu}{\sqrt{1+u^2}} = w \sin \varphi$, ростки являются прямыми и скорость роста поверхности вдоль прямого ростка является постоянной. Рост профиля поверхности при этом задается параметрически [1]:

$$x = y + \frac{u_0(y)}{\sqrt{1+u_0^2(y)}} wt, \quad z = z_0(y) + \frac{wt}{\sqrt{1+u_0^2(y)}}. \tag{14}$$

Если рассмотреть в качестве исходного профиля кривой $z = z(x, t)$ синусоиду, получим:

$$z_0(x) = z_0 \cos kx; \quad u_0(x) = z_0 k \sin kx.$$

Тогда параметрическое уравнение линии $z = z(x, t)$ имеет вид:

$$z = \mu + \frac{\varepsilon \tau \sin \mu}{\sqrt{1+\varepsilon^2 \sin^2 \mu}}, \quad \eta = \varepsilon \cos \mu + \frac{\tau}{\sqrt{1+\varepsilon^2 \sin^2 \mu}},$$

где введены безразмерные переменные $kx = z$; $ky = \mu$; $ckt = \tau$; $kz = \eta$ и безразмерный параметр $kz_0 = \varepsilon$.

Профиль опорного основания $z = z(x, t)$, построенный по приведенным выше параметрическим формулам (при $\varepsilon = 0,5$, для различных t), показан на рис. 5.

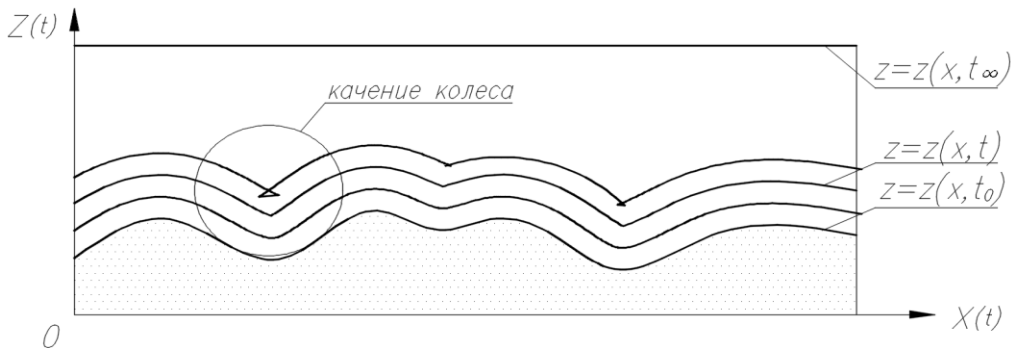


Рис. 5. Рост профиля поверхности $z = z(x, t)$

Fig. 5. Surface profile growth $z = z(x, t)$

Как видно из рис. 5, в процессе роста поверхности вершины со временем уплощаются, а впадины заостряются. При критическом значении параметра (времени) начинают

образовываться «ласточкины хвосты». Подобная кривая соответствует волновому фронту оптической волны в изотропной среде.

Пример 5. Приведенные в предыдущем примере параметрические зависимости, описывающие рост поверхности, применимы и для описания выветриваемых или тающих поверхностей движения, если применить отрицательную скорость роста $w < 0$. Профили тающей поверхности приведены на рис. 6. С ростом параметра (времени), вершины начинают заостряться, а впадины, наоборот – уплощаются.

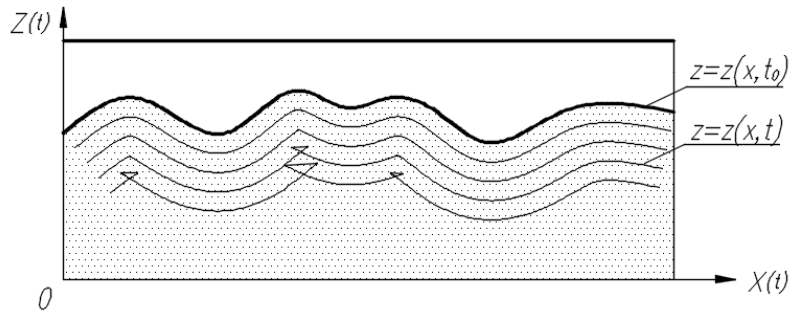


Рис. 6. Таяние профиля поверхности $z = z(x, t)$

Fig. 6. Surface profile melting $z = z(x, t)$

Рассмотренные примеры показывают универсальность математической модели (12), позволяющей описывать широкий круг явлений, связанных с изменением профиля опорного основания транспортных средств.

Особо следует отметить пример 4: одной из важных интерпретаций решений (14) графиков рис. 5 является их соответствие кривой, описываемой центром колеса при качении по неровному профилю дороги [6]. Однако данная интерпретация осложняется нарушением гладкости решений уравнения (12): при малом радиусе колеса R относительно кривизны профиля опорной поверхности, решения (14) соответствуют уравнениям эквидистанты к кривой, заданной параметрически, которые выводятся из элементарных соображений дифференциальной геометрии; при увеличении радиуса колеса (или увеличении кривизны профиля) возникает так называемая градиентная катастрофа, которая характеризуется потерей гладкости и однозначности решения. Градиентная катастрофа, в интерпретации качения колеса по неровному профилю, означает критическое значение радиуса колеса R^* , когда возникает двухточечный контакт при перекачивании через яму (лауну). При значениях радиуса колеса R , больших критического значения, имеет место неоднозначность в решении уравнения (12), из-за появления «ласточкиных хвостов» (рис. 7).

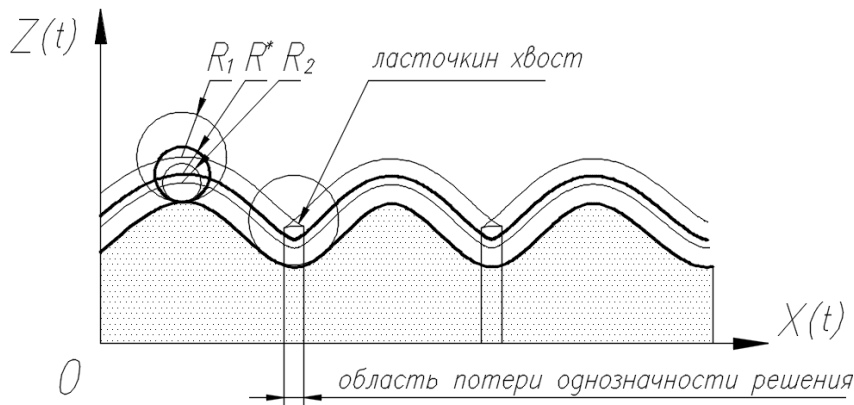


Рис. 7. Потеря однозначности решений уравнения (12) при качении колеса по неровному профилю

Fig. 7. Loss of uniqueness of solutions of equation (12) when a wheel rolls on an uneven profile

С математической точки зрения, градиентная катастрофа наступает в момент потери однозначности эйлерового описания координат. Как следует из (1), на ростке $z_p = \xi(x_p, t)$ имеет место постоянство лагранжевой координаты (т.е. росток является траекторией точки с координатой (x_p, z_p)). Обычно рассмотрение изменения профиля проводится в неподвижной системе координат, в частности, в конкретных фиксированных точках с декартовыми координатами. Такой более естественный способ наблюдения суть эйлерово описание.

Связь эйлеровых и лагранжевых координат дается уравнением, вытекающим из (3):

$$z_p(t) = z(x_p(t), t).$$

Потеря однозначности возникает в том случае, когда происходит пересечение ростков: тогда одной точке с эйлеровыми координатами (центр колеса) соответствуют две лагранжевые координаты (рис. 8). Таким образом, решения уравнения (12) разбиваются на две области: однозначное решение – градиентная катастрофа – многозначное решение.

Многозначное решение имеет смысл не во всех задачах, а только при описании невзаимодействующих потоков частиц и полей, например, оптических волн. В таких задачах, как описание фронта лесного пожара, одномерного движения частиц, качения колеса по неровному профилю и др., многозначность решения не имеет физического смысла. В случае задачи о качении колеса по неровному профилю многозначность решений находит отражение в появлении «ласточкиных» хвостов. Понятно, что такая кривая не может быть траекторией центра колеса.

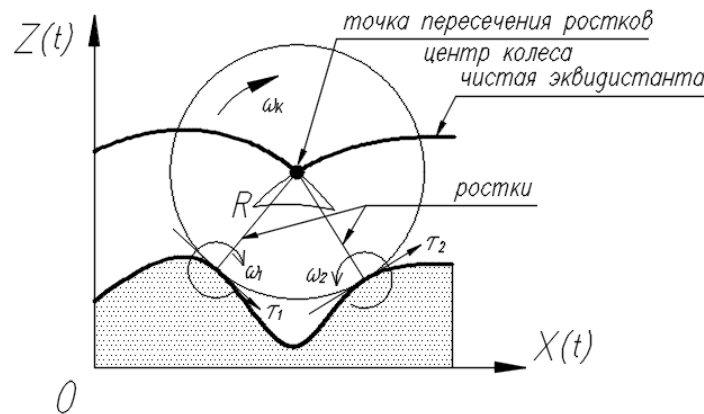


Рис. 8. Возникновение неоднозначности эйлерова и лагранжева описаний

Fig. 8. The emergence of ambiguity of Eulerian and Lagrangian descriptions

Очевидно также, что траекторией центра колеса должна быть, так называемая, «чистая» или усеченная эквидистанта (без «ласточкиных хвостов»). Даже в случае отсутствия физического смысла многозначного решения не исключается возможность конструировать из разных решений, как из подручного материала, нужные обобщенные решения и проверять их соответствие смыслу конкретной прикладной задачи. При этом находят применение различные алгоритмы конструирования обобщенных решений: накладыванием ограничений; условий экстремума; средневзвешанной суммы и т.п. Поскольку одно и то же дифференциальное уравнение в частных производных при одинаковых начальных и граничных условиях может иметь различные обобщенные решения, накладывая некоторый ряд ограничений, класс обобщенных решений возможно сузить до одного. Указанные алгоритмы конструирования обобщенных решений, помимо физического смысла, должны удовлетворять некоторым общим интегральным законам, следствием которых является само дифференциальное уравнение. Иными словами, если дифференциальное уравнение удовлетворяет некоторым общим интегральным законам сохранения, то и обобщенное решение должно согласовываться с этими законами сохранения даже в том случае, когда классические решения дифференциального уравнения уже не существуют.

Например, в случае качения колеса по неровному профилю в области многозначности решения, получить нужное обобщенное решение можно, накладывая дополнительные ограничения: 1) требование однозначности решения; 2) требование максимальности решения.

Рассмотрим, следствием какого интегрального инварианта является дифференциальное уравнение (12), описывающее, в том числе, траекторию центра колеса, катящегося по неровному профилю дороги. Для этого умножим уравнение (12):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

на величину $\frac{dC(u)}{dt}$, тогда уравнение допускает вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (15)$$

где $v(x, t) = C(u(x, t))$.

Уравнение (15) является уравнением Римана в стандартной форме, которое выражает в дифференциальной форме более общий интегральный закон сохранения. Определить закон сохранения дифференциального уравнения – значит найти инвариант этого уравнения. Для этого представим (15) в дивергентной форме:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение по x в бесконечных пределах, считая $v(x, t)$ стремящемся к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$, приходим к выражению:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} v(x, t) dx = 0.$$

Откуда следует, что инвариантом является выражение:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x, 0) dx = const. \quad (16)$$

В области многозначного решения, обобщенное решение, соответствующее траектории центра колеса, катящегося по неровному профилю, должно удовлетворять приведенному выше инварианту. Указанное требование находит отражение в структуре разрывов обобщенного решения (рис. 9).

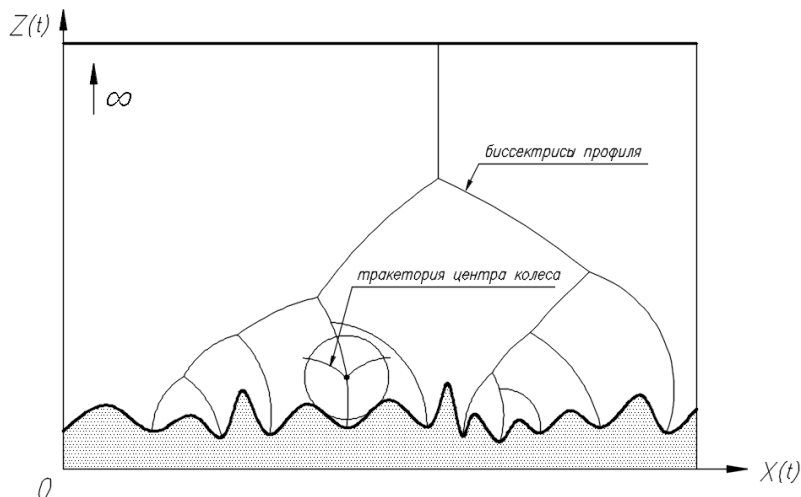


Рис. 9. Структура разрывов гладкости траекторий центра колеса в области многозначности

Рис. 9. Structure of discontinuities of smoothness of wheel center trajectories in the domain of ambiguity

На рис. 9 показаны биссектрисы, соответствующие профилю опорной поверхности. Согласно определению [6], биссектрисой $L(M)$ множества M (область ограниченная сверху профилем опорной поверхности) называется совокупность всех точек из дополнения множества M до плоскости $(R^2 \setminus M)$, которая имеет не менее двух проекций на M . Как следует

из определения, биссектриссы профиля являются теми кривыми, на которых траектории центра колеса (при различных радиусах колеса R) терпят разрыв гладкости (оставаясь непрерывными). На рис. 9 показана качественная картина поведения биссекторных кривых (перевернутое дерево): биссектрисы с ростом радиуса катящегося колеса попарно сливаются между собой и в пределе при $R \rightarrow \infty$ вырождаются в одну единственную биссектрису. Предельный случай $R \rightarrow \infty$ можно переформулировать как качение колеса с конечным радиусом, но по микропрофилю, неровностями которого можно пренебречь.

Рассматривают другой тип решений нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, так называемые «слабые» решения [7]. Слабыми решениями называют функции, удовлетворяющие упомянутым уравнениям всюду, где существуют производные данных функций, и имеющие разрывы (самих функций или их производных) вдоль кривых (биссекторных кривых рис. 9), которые определяются из дополнительных соображений.

В заключение отметим, что приведенное в статье уравнение, описывающее изменение профиля поверхности движения и связанные с ним частные примеры, открывает дополнительные возможности в моделировании, исследовании процессов взаимодействия движителя с опорным основанием. Приведенное уравнение допускает включение в более общие математические модели транспортного средства, например, модели, описывающие движение колебательной системы по неровному профилю.

Данная работа проведена как продолжение исследований «Нижегородской научно-практической школы транспортного снеговедения».

Библиографический список

1. **Арнольд, В. И.** Волновые фронты и топология кривых / В.И. Арнольд. – М.: МЦНМО, 2018. – 116 с.
2. **Арнольд, В.И.** Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В.И. Арнольд. – М.: Наука, 1978. – 304 с.
3. **Весницкий, А.И.** Волны в системах с движущимися границами и нагрузками / А.И. Весницкий. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
4. **Аникин, А.А.** Проходимость гусеничных машин по снегу / А.А. Аникин, Л.В. Барахтанов, И.О. Донато. – Н. Новгород: Омега, 2009. – 362 с.
5. **Жилейкин, М.М.** Математическая модель качения эластичного колеса по неровностям недеформируемого опорного основания / М.М. Жилейкин, Б.В. Падалкин // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2016. № 3 (672). С. 24-29.
6. **Зельдович, Я.Б.** Элементы математической физики / Я.Б. Зельдович. – М.: Наука, 1973. – 351 с.
7. **Лебедев, П.Д.** Геометрия и асимптотика волновых фронтов / П.Д. Лебедев, А.А. Успенский // Известия высших учебных заведений. Математика. 2008. № 3. С. 27-37.

*Дата поступления
в редакцию: 12.03.2024*

*Дата принятия
к публикации: 24.10.2024*